Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. А. ТРАХТЕНБРОТ

ТАБЛИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕКУРСИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 XII 1954)

В предлагаемой работе вводится понятие сигнализирующей функции, которое способствует выяснению некоторых специфических особенностей примитивно-рекурсивного вычислительного процесса. Это позволяет выяснить связь между рекурсивными операциями и процессом табличной сводимости, описанными Е. Постом в работе ([1]).

1°. Понятие частично-рекурсивного оператора является уточнением интуитивного представления об эффективном преобразовании функций (систем функций) в функции *. Определение этого понятия подсказывается известным определением частично-рекурсивной и общерекурсивной функций (см. ([2]), § 16, п. 5). Частично-рекурсивный оператор $\varphi = T[f_1, \ldots, f_n]$ задается системой определяющих уравнений (схемой), в которых фигурируют функции-прообразы $f_1, \ldots, f_n$, функция-образ φ и, вообще говоря, еще несколько вспомогательных функций: $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$. Каждое уравнение есть равенство двух термов. Понятие терма определяется как в ([2]): а) числа, переменные и индивидуальная функция $n+1$ являются термами; б) выражения, получаемые из функций f_i, φ, σ_j путем подстановки термов вместо их переменных, являются термами. Вычисление значений функции φ по схеме заключается в выводе равенств вида $\varphi(x_1, \ldots, x_k) = y$ (x_i, y — числа) из определяющих уравнений. К правилам вывода относятся: 1) подстановка чисел вместо переменных; 2) замена равных равными, т. е. правила, которые даны в ([2]), и, кроме того, 3) замена терма вида $f_i(k)$ соответствующим значением функции-прообраза.

При этом предполагается выполненным условие непротиворечивости: ни при каком индивидуальном выборе функций f_i не выводима пара равенств вида $\varphi(x_1, \ldots, x_k) = y$ и $\varphi(x_1, \ldots, x_k) = \eta$, где $y \neq \eta$.

Будем говорить, что число k использовано при некотором вычислении по схеме оператора, если оно встречается как терм или часть терма в соответствующем выводе. Пусть частично-рекурсивный оператор, заданный схемой $\mathfrak{A}$, действует на некоторые функции $f_1^0, \ldots, f_n^0$, т. е. $\varphi_0 = T[f_1^0, \ldots, f_n^0]$.

Определение 1. Функция $\varphi^*(x_1, \ldots, x_k)$ называется сигнализирующей оператора T, примененного к функциям f_i^0 по схеме $\mathfrak{A}$, если выполнено условие: при любых $x_1, \ldots, x_k$ возможно такое вычисление значения $\varphi^0(x_1, \ldots, x_k)$ по этой схеме, при котором все использованные числа не превосходят $\varphi^*(x_1, \ldots, x_k)$.

2°. Частично-рекурсивный оператор $\varphi = T[f_1, \ldots, f_n]$ преобразует всюду определенные функции $f_1, \ldots, f_n$ в функцию φ, которая, вообще говоря, не определена всюду. Обозначим через K класс всех общере-

* Всюду имеются в виду функции, аргументы и значения которых являются числами. Под числом понимается натуральное число или 0.

курсивных операторов, т. е. тех частично-рекурсивных операторов, для которых функция-образ всюду определена, коль скоро всюду определены функции-прообразы.

Оператор T называется примитивно-рекурсивным (или оператором класса $K_{\text{пр}}$), если функция-образ определена посредством суперпозиций и примитивных рекурсий, исходя из функций-прообразов и индивидуальных функций $s(n) = n + 1$, $g_k^i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) = x_i$ и $g(x_1, \ldots, x_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $\varphi = T[f_1, \ldots, f_s, f_{s+1}, \ldots, f_n]$ — примитивно-рекурсивный оператор и $f_1^0, \ldots, f_s^0$ — фиксированные общерекурсивные функции; в таком случае оператор $T'[f_{s+1}, \ldots, f_n] = T[f_1^0, \ldots, f_s^0, f_{s+1}, \ldots, f_n]$ будем называть постовским оператором (оператором класса $K_{\text{п}}$).

Теорема 1. *Имеют место следующие строгие включения:* $K_{\text{пр}} \subset K_{\text{п}} \subset K$.

Согласно определению 1 сигнализирующая функция зависит от индивидуальной системы функций, на которую действует оператор. Вместе с тем, операторам классов $K_{\text{пр}}$ и $K_{\text{п}}$ присуще следующее свойство, которое не обобщается на класс K:

Теорема 2. *Пусть T — примитивно-рекурсивный (постовский) оператор и $\mathfrak{M}$ — какой-нибудь класс функций, ограниченных в своей совокупности примитивно-рекурсивной (общерекурсивной) функцией; в таком случае существует примитивно-рекурсивная (общерекурсивная) функция, являющаяся сигнализирующей оператора T, примененного к любым функциям из $\mathfrak{M}$.*

3°. Пусть оператор T преобразует функцию q в функцию p; следуя Посту, будем говорить, что p сводима к q посредством оператора (процесса сводимости) T. Оператор T будем называть П-оператором, если он действует на предикаты и преобразует их в предикаты. В работе [1] Пост трактует П-оператор $p = T[q]$ как процесс сводимости проблемы разрешимости для множества P такого, что $x \in P$ равносильно $p(x) = 1$, к проблеме разрешимости для множества Q ($x \in Q$ равносильно $q(x) = 1$). В этой же работе рассматривается способ представления П-операторов (процессов сводимости) при помощи таблиц, который может быть описан следующим образом.

Таблицы Поста ранга k $(k = 1, 2, \ldots)$ имеют вид:

$$\begin{array}{c|c} a_1, a_2, \ldots, a_k & \\ i_1^1, i_2^1, \ldots, i_k^1 & j^1 \\ \cdots\cdots\cdots & \vdots \\ i_1^s, i_2^s, \ldots, i_k^s & j^s \\ \cdots\cdots\cdots & \vdots \\ i_1^\nu, i_2^\nu, \ldots, i_k^\nu & j^\nu \end{array}$$

где кортеж $a_1, \ldots, a_k$ (пробный кортеж) состоит из произвольных натуральных чисел, но все кортежи $i_1^s, \ldots, i_k^s$ (варианты таблицы) и столбец j^1 состоят из единиц и нулей.

$$\begin{array}{c} \vdots \\ j^s \\ \vdots \\ j^\nu \end{array}$$

Варианты таблицы попарно различны, а элемент j^s называется пометкой соответствующего варианта $i_1^s, \ldots, i_k^s$. Таблица называется полной, если число ее вариантов равняется 2^k, т. е. если ее варианты исчерпывают всевозможные кортежи длины k, состоящие из единиц

и нулей. Пусть теперь $q(x)$ — произвольная функция; вариант таблицы называется истинным относительно q, если он задает последовательность значений функции q, подсчитанных для элементов пробного кортежа. Очевидно, в полной таблице имеется свой истинный вариант относительно каждого предиката.

Определение 2 (табличного представления оператора). Функция $\Gamma(n)$ реализует табличное представление П-оператора $p = T[q]$, если выполнены условия: а) при любом n $\Gamma(n)$ задает геделевский номер какой-нибудь таблицы Поста; б) при любом предикате q $p(n)$ равняется пометке варианта таблицы $\Gamma(n)$, истинного относительно q.

Очевидно, для того, чтобы оператор T был применим к любому предикату q, необходимо и достаточно, чтобы все таблицы $\Gamma(n)$ были полными.

Эффективность операторов (процессов сводимости), допускающих табличное представление, характеризуется следующей теоремой:

Теорема 3. *П-оператор является примитивно-рекурсивным (постовским) оператором в том и только в том случае, если он допускает табличное представление, реализуемое примитивно-рекурсивной (общерекурсивной) функцией* $\Gamma(n)$.

4°. В таблицах Поста элементы i_m^s, j^s принимают лишь значения 1 и 0, что соответствует назначению этих таблиц описать сводимость предикатов к предикатам. Естественно рассматривать таблицы общего вида, где i_m^s, j^s — произвольные числа, а также операторы, допускающие табличное представление посредством таких таблиц. Если в определении 2 термины «П-оператор», «предикат», «таблицы Поста» заменить более общими терминами «оператор», «функция» и «таблица», то теорему 3 можно обобщить на случай операторов, действующих на функции общего вида:

Теорема 3′. *Пусть оператор* T *действует на функции, мажорируемые в своей совокупности примитивно-рекурсивной (общерекурсивной) функцией; тогда оператор* T *является примитивно-рекурсивным (постовским) в том и лишь в том случае, если он допускает табличное представление, реализуемое примитивно-рекурсивной (общерекурсивной) функцией.*

5°. Желательно выяснить самый общий способ задания частично-рекурсивных операторов таблицами, а этого можно достигнуть при помощи следующего обобщения постовского метода табличного представления:

Определение 3. Функция $\Gamma(n, w)$ реализует μ-табличное представление оператора $p = T[q]$, если выполнены условия: а) при любых n, w $\Gamma(n, w)$ задает геделевский номер какой-нибудь таблицы; б) для любой функции q $p(n)$ равняется пометке того истинного относительно q варианта, который первым встречается в последовательности таблиц

$$\Gamma(n, 0),\ \Gamma(n, 1), \ldots, \Gamma(n, w), \ldots \qquad (*)$$

Примечание. Отсутствие в последовательности (*) истинного относительно q варианта равносильно тому, что функция p не определена для аргумента n.

Теорема 4. *Оператор* $p = T[q]$ *является частично-рекурсивным в том и лишь в том случае, если он допускает* μ*-табличное представление, реализуемое примитивно-рекурсивной функцией.*

Условимся говорить, что оператор $p = T[q]$ вполне применим к всюду определенной функции q, если p также всюду определена. Через $\mathfrak{K}_{(f)x}$ обозначим класс всех частично-рекурсивных операторов, вполне применимых к любой функции, мажорируемой функцией $f(x)$.

Теорема 5. *Пусть $f(x)$ — общерекурсивная функция и T — оператор класса $\mathfrak{K}_{f(x)}$; в таком случае существует постовский оператор класса T' такой, что $T'[q] \equiv T[q]$ для любой функции q, мажорируемой $f(x)$ (схема оператора T' эффективно строится по схеме T).*

Из этой теоремы вытекает, в частности:

Следствие. *П-оператор, вполне применимый к любому предикату, является частично-рекурсивным в том и лишь в том случае, если он допускает табличное представление, реализуемое общерекурсивной функцией.*

Таким образом, хотя самая общая концепция эффективной сводимости описывается через μ-табличное представление операторов, тем не менее, в классе П-операторов, вполне применимых к любому предикату, она уже полностью реализуется в виде постовской табличной сводимости (табличное представление операторов).

Заметим в заключение, что переход от задания оператора системой определяющих уравнений к табличному (μ-табличному) представлению, а также обратный переход осуществляются эффективно.

Поступило
25 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Post, Bull. Am. Math. Soc., **50**, 284 (1944). [2] Р. Петер, Рекурсивные функции, М., 1954.