Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 3

МАТЕМАТИКА

Действительный член АН Уз.ССР Т. А. САРЫМСАКОВ

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОЛИНОМОВ С РЕГУЛЯРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КОРНЕЙ

1. Пусть дана последовательность полиномов

$$P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots. \tag{1}$$

с вещественными корнями. Будем говорить, что последовательность полиномов (1) имеет регулярное распределение корней, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(-\infty, x)}{n} = \psi(x), \tag{2}$$

где $N_n(-\infty, x)$ обозначает число корней, не превосходящих x, полинома $P_n(x)$ из последовательности (1). Функция $\psi(x)$ называется предельным законом распределения корней последовательности полиномов (1).

В ряде случаев целесообразно также рассматривать предельные дифференциальные законы распределения для корней последовательности полиномов (1), которые определяются следующим двойным пределом:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x, x+\Delta x)}{n} = \varphi(x), \tag{3}$$

разумеется, если этот предел существует; здесь $N_n(x, x+\Delta x)$ обозначает число корней, лежащих в интервале $(x, x+\Delta x)$ полинома $P_n(x)$, принадлежащего последовательности (1). Предположим затем, что коэффициент при старшем члене, т. е. при x^n, у полинома $P_n(x)$ равен единице, а коэффициент при x^{n-1} равен нулю и что все корни полиномов последовательности (1) ограничены в их совокупности и расположены в конечном интервале $(-a, +a)$; впрочем, последнее требование, вообще говоря, всегда можно удовлетворить, рассматривая вместо распределения величин $x_{i,n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ распределение величин $x_{i,n}/a_n$, где a_n — соответствующим образом подобранное постоянное, зависящее только от n, а $x_{i,n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ обозначает корень полинома $P_n(x)$.

Введем следующие определения:

1) Если для любого ε (>0) можно указать натуральное число n_0 такое, что числа $x'_{i,n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют неравенствам

$$|x'_{i,n} - x_{i,n}| < \varepsilon \quad \text{при } n \geqslant n_0 \text{ и для всех } i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

то $x'_{i,n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ будем называть приближенными в совокупности значениями корней $x_{i,n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ полинома $P_n(x)$.

2) Последовательность полиномов (1) принадлежит множеству $R_\psi(a, b)$, если для корней этой последовательности полиномов выполняется предельное равенство (2); в этом случае будем употреблять запись

$$\{P_n(x)\} \in R_\psi(a, b),$$

которая отмечает также предположение, что все корни полинома $P_n(x)$ находятся в интервале (a, b). Далее, согласно известным формулам Ньютона, между коэффициентами полинома $P_n(x)$ и моментами для его корней, т. е. числами

$$\mu_{k,n} = \frac{S_{k,n}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i,n}^k}{n} \quad (k = 1,2,\ldots), \tag{5}$$

имеют место соотношения:

$$\mu_{k,n} + p_{2,n}\mu_{k-2,n} + \ldots + p_{k-1,n}\mu_{1,n} + \frac{k}{n} p_{k,n} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n); \tag{6}$$

$$\mu_{n+k,n} + p_{2,n}\mu_{n+k-2,n} + \ldots + p_{n-1,n}\mu_{k+1,n} + p_{n,n}\mu_{k,n} = 0 \quad (k > 0), \tag{7}$$

где $p_{k,n}$ — коэффициент при x^{n-k} полинома $P_n(x)$.

В силу допущений, сделанных выше, и известных из проблемы моментов предложений ([1],[2]) можно высказать следующие утверждения:

а) Существование пределов

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{k,n} = \mu_k \quad (k = 1,2,\ldots) \tag{8}$$

влечет за собой существование функции распределения $\psi(x)$ и справедливость предельного равенства (2).

б) Существование предела (2) влечет за собой существование пределов (8) и, следовательно, справедливость равенства

$$\mu_k = \int_a^b x^k d\psi(x) \quad (k = 1,2,\ldots). \tag{9}$$

Заметим, что если заведомо известно выполнение соотношения $\{P_n(x)\} \in R_\psi(a, b)$, то пределы (8) всегда существуют и справедливы равенства (9). Итак, пользуясь соотношениями (6) и (7), мы можем вычислить все моменты распределения для корней полинома $P_n(x)$, если известны его коэффициенты; затем остается проверить существование пределов (8) для того, чтобы убедиться в существовании предельной функции распределения $\psi(x)$.

Следовательно, по крайней мере теоретически, зная предельные значения моментов распределения для корней, т. е. числа μ_k, можно вычислить по ним характеристическую функцию, соответствующую предельной функции распределения, а пользуясь характеристической функцией, по известной теореме обращения, можно определить самую предельную функцию распределения корней полиномов последовательности (1). Однако при рассмотрении конкретных примеров задача нахождения предельной функции распределения корней в ряде случаев может быть значительно упрощена. Например, для корней полиномов Лежандра справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i,n}^k}{n} = \lim_{n\to\infty} \mu_{k,n} = \mu_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^k\theta\, d\theta; \tag{10}$$

* См. ([3]), стр. 102.

полагая здесь $\cos\theta = z$, будем иметь

$$\mu_k = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} z^k \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Отсюда предельная дифференциальная функция распределения

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-z^2}}$$

определяется непосредственно.

По функции $\varphi(z)$ легко определить предельную интегральную функцию распределения для корней последовательности полиномов Лежандра.

2. Далее предположим, что предельная функция распределения $\psi(x)$ дифференцируема в интервале (a, b); при этом естественно производную функции $\psi(x)$ обозначить через $\varphi(x)$ (см. равенство (3)). Тогда существует преобразование

$$x = \omega(t) \tag{11}$$

такое, что функция

$$\theta(t) = \varphi(\omega(t))\,\omega'(t) = \lambda, \tag{12}$$

рассматриваемая как дифференциальная функция распределения относительно новой переменной t, будет представлять дифференциальную функцию распределения, соответствующую равномерной функции распределения.

В самом деле, из (12) имеем

$$\varphi(x)\,dx = \lambda\,dt,$$

отсюда

$$\lambda t + c = \int_a^x \varphi(x)\,dx = \psi(x); \tag{13}$$

при этом $\psi(x)$ как функция распределения — монотонная функция. Поэтому равенство (13) допускает обращение относительно x, т. е. равенство (13) однозначно разрешимо относительно x и, следовательно, преобразование (11) существует,

Постоянную c в равенстве (13) можно определить из начального условия, налагаемого на преобразование (11); например, мы подчиним его условию

$$\omega(0) = 0.$$

Выбор начального условия в каждом конкретном случае лучше всего производить, исходя из какого-либо определенного свойства, которым обладают корни $x_{i,n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ полинома $P_n(x)$ или их функция распределения. Затем, в силу (13), мы имеем

$$t_{i,n} = \frac{1}{\lambda}\{\psi(x_{i,n}) - c\}; \tag{14}$$

при этом величины $t_{i,n}$ (в предположении, что они занумерованы в возрастающем порядке) будут иметь при достаточно большом n распределение почти равномерное в интервале (α, β) изменения переменного t, т. е.

$$t_{i+1,n} - t_{i,n} \approx \frac{\beta - \alpha}{n}. \tag{15}$$

Зная величины $t_{i,n}$, по равенству (11) найдем приближенные значения $x_{i,n}$.

Таким образом, отсюда непосредственно вытекает, что зная один из корней полинома $P_n(x)$, мы можем найти приближенные значения всех остальных его корней.

Мы изложили выше метод, который будем именовать методом выравнивания для нахождения приближенных значений корней полинома $P_n(x)$, принадлежащего последовательности полиномов с регулярным распределением корней. Что же касается обоснования этого метода, то оно содержится в следующем предложении:

Теорема 1. *Если выполняются условия:*

1) $\{P_n(x)\} \in R_\psi(a, b)$;

2) *известен один корень полинома* $P_n(x)$ *для каждого* n;

3) *функция* $\omega(t)$ *дифференцируема в интервале* (α, β);

4) *сходимость в равенстве* (2) *равномерна относительно* x *в интервале* (a, b),

то значения корней полинома $P_n(x)$, *вычисленные методом выравнивания при помощи предельной функции распределения* $\psi(x)$, *будут приближенными в совокупности.*

Реализация изложенного выше метода приближенного вычисления корней применительно к конкретным частным случаям, например к последовательностям полиномов Лежандра, Эрмита и др., была осуществлена в работе автора ([4]).

3. Переходя к описанию множества $R_\psi(a, b)$, можно высказать следующее предложение:

Теорема 2. *Пусть даны две последовательности полиномов* $\{P_n(x)\}$ *и* $\{Q_n(x)\}$ *с регулярными распределениями корней в одном и том же интервале* (a, b).

Тогда для одновременного выполнения соотношений

$$\{P_n(x)\} \in R_\psi(a, b) \quad и \quad \{Q_n(x)\} \in R_\psi(a, b)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого фиксированного k *имело место предельное равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{k,n}}{q_{k,n}} = 1, \tag{16}$$

где $p_{k,n}$ *и* $q_{k,n}$ *— коэффициенты при* x^{n-k} *полиномов* $P_n(x)$ *и* $Q_n(x)$, *соответственно.*

Среднеазиатский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
30 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Fréchet, J. Shohat, Trans. Am. Math. Soc., **33**, 533 (1951). [2] В. И. Гливенко, Интеграл Стильтьеса, 1936. [3] Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, 1937. [4] Т. А. Сарымсаков, Тр. Узб. филиала АН СССР, сер. IV, матем., в. 1 (1941).