Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 3

МАТЕМАТИКА

Е. Я. РЕМЕЗ

О ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

1°. Предмет рассмотрений. Здесь будет речь о задачах чебышевского типа, в которых значения параметров a, b; λ или λ^* подлежат определению под одним из условий

$$\max_{(x,y)\in G} |y - ax - b| = L(a, b) = \min, \tag{1}$$

$$\max_{(x,y)\in G} |y - \lambda x| = L_1(\lambda) = \min, \tag{2}$$

$$\max_{(x,y)\in G} \left|1 - \lambda^* \frac{x}{y}\right| = L_2(\lambda^*) = \min; \tag{3}$$

G — заданное плоское точечное множество, для конкретности предполагаемое ограниченным и замкнутым, а в случае задачи (3) — подчиненным еще условию $C_1 \leqslant x/y \leqslant C_2$ $(C_1 C_2 > 0)$. Координаты (прямоугольные) точки $(x, y) \in G$ могут при этом представляться в виде функций $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ аргумента $\xi \in E$, где E — заданное множество в пространстве любого числа измерений, например,

$$x = \varphi(s, t, \ldots), \quad y = \psi(s, t, \ldots). \tag{4}$$

В случае конечного множества G данная работа имеет в виду, прежде всего, задачу внедрения чебышевского принципа приближения в практику построения достаточно разнообразных эмпирических формул. С другой стороны, отметим, что как при конечной, так и при бесконечной мощности множества G те же методы (задача (2)) могут также существенным образом применяться, между прочим, для решения вспомогательной задачи, к которой сводится отыскание совокупности всех (точных или же вычисляемых по приближению) решений чебышевской задачи более общего вида (с любым числом линейно входящих параметров) при наличии известной ситуации (ср., к примеру, в монографии автора [1] формулу (238)), характеризуемой возможностью бесконечного числа (именно, ∞^1) решений.

При конкретизации некоторых практических деталей указываемых методов нам здесь придется подчас ограничиваться случаем конечного множества G, для которого случай бесконечного G может рассматриваться, если угодно, как предельный.

2°. О графическом построении контура Г выпуклой оболочки K_M плоского конечного точечного множества M. Пусть $M = \{P_\nu\} \equiv \{(x_\nu, y_\nu)\}$ $(\nu = 1, \ldots, m)$. В данном случае выпуклый многоугольный [2] контур Г, прежде всего, заведомо включит

БИБЛИОТЕКА ПОГАШЕНО

те точки P_ν для которых $x_\nu = x_{\min}$ или $x_\nu = x_{\max}$ точки (P_1 и P_8 на рис. 1). Вопрос сведется к графическому построению (при помощи обыкновенной линейки) двух ломаных маршрутов — верхнего ($P_1P_4P_6P_8$ на рис. 1) и нижнего ($P_1P_3P_8$), идущих от крайней левой точки множества M к крайней правой*. Если на верхнем (нижнем) маршруте уже достигнута точка P_k, то следующая сторона P_kP_l пройдет к точке P_l, удовлетворяющей таким двум условиям: а) $x_l > x_k$; б) угловой коэффициент $(y_l - y_k):(x_l - x_k)$** имеет наибольшее (наименьшее) возможное значение.

3°. Графо-аналитическое решение задачи (1). Предполагая, что выпуклая оболочка K_G построена, и опираясь на основные факты общей теории чебышевских приближений ([1], гл. VIII и I), а также учитывая простейшие общие свойства выпуклых множеств ([2,3]), нетрудно придти, прежде всего, к следующему предложению, дающему основу для отыскания решения задачи (1):

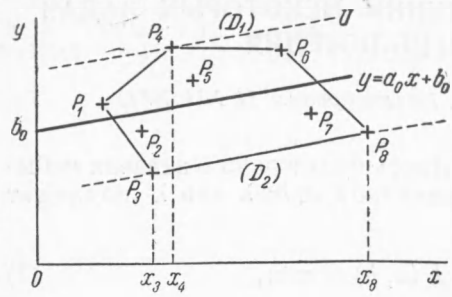


Рис. 1

*Искомое решение*** *геометрически представляется средней линией* ($y = a_0x + b_0$, рис. 1 при $G \equiv M$) *полосы между двумя параллельными опорными прямыми* D_1, D_2 *выпуклой фигуры* K_G (*прямые* P_4U *и* P_3P_8) *удовлетворяющими следующему условию: если обозначить через* K_1 *и* K_2, *соответственно, множества точек соприкосновения прямых* D_1 *и* D_2 *с* K_G (*т. е.* $K_i = D_i \cap K_G$; $i = 1, 2$) *и через* A_i $(i = 1, 2)$ — *ортогональную проекцию* K_i *на ось* Ox, *то множества* A_1 *и* A_2 *должны иметь хотя бы одну общую точку* ****.

По смыслу формулировки всегда найдется хотя бы одна пара параллельных опорных прямых, отвечающих указанному условию, и средняя линия всякой полосы такого рода доставляет решение. Многозначное решение геометрически представится пучком прямых, центр которого проектируется в точку пересечения $A_1 \cap A_2$. В общем случае множества соприкосновения K_1 и K_2 могут каждое представлять собой либо отрезок, либо одну точку.

В случае конечного множества G крайние решения (совпадающие между собой, когда решение единственно, и соответствующие двум крайним прямым упомянутого пучка в случае множественности решения) характеризуются тем, что для них хотя бы одно из двух множеств K_1, K_2 представляет собой отрезок — сторону выпуклого контура Г. Полное решение задачи здесь сводится, очевидно, к определению этих крайних решений. Условимся говорить, что для стороны P_rP_s контура Г какая-нибудь вершина $P_t \in \overline{P_rP_s}$ является противо-

---

* Если бы точек P_ν, для которых $x_\nu = x_{\min}$ или $x_\nu = x_{\max}$, оказалось более чем по одной, то контур Г включал бы, соответственно, еще один или два вертикальных отрезка.

** Вычисление этой величины, вообще говоря, отнюдь не предполагается.

*** Выражаясь точно, решением является искомая система значений $a = a_0$, $b = b_0$. Но мы будем пользоваться также выражением «решение $a_0x + b_0$», удобным для некоторых формулировок.

**** Заметим, что прямое обобщение данного предложения сохраняет силу при замене двучленного выражения $(ax + b)$ $(n+1)$-членным $\sum_{j=1}^{n} a_jx_j + b$, доставляя, таким образом, общую геометрическую характеристику решений соответствующей гораздо более широкой категории чебышевских задач.

лежащею, если прямая $x = x_i$ пересекает сторону P_rP_s либо внутри, либо в одном из ее концов. В первом случае мы скажем, что вершина P_i является собственно противолежащею. С другой стороны, мы условимся говорить, что какая-нибудь вершина P_k находится в отношении сопряжения с некоторой стороной P_rP_s, если через P_k может быть проведена опорная прямая, параллельная P_rP_s. Допустим, что мы перебираем последовательно стороны многоугольника Г, останавливая свое внимание на тех сторонах, для которых имеются противолежащие вершины. Хотя бы в одном случае непременно окажется, что какая-нибудь вершина, скажем P_i, из противолежащих некоторой стороне P_rP_s находится в то же время с этою последнею в отношении сопряжения. Тем самым, очевидно, мы непосредственно обнаружим пару параллельных опорных прямых требуемого рода и соответствующее крайнее решение $a_0x + b_0$, представляемое среднею линиею. Если указанная вершина P_i собственно противолежащая, то найденное решение наверное является единственным. Если же, скажем, $x_i = x_r$, то аналогичное испытание других сторон контура Г, прилегающих к двум вершинам P_r и P_i, позволит немедленно обнаружить и второе крайнее решение или же установить единственность решения.

К этому остается добавить три существенных замечания.

Во-первых, как раз в тех случаях, когда данный выбор типа приближения ($y = ax + b$) является наиболее оправданным, мы встречаемся практически с некоторым затруднением, связанным с «недостаточной рельефностью» картины расположения точек $P_\nu \in G$, близкого к прямолинейному. Но для устранения этого затруднения достаточно применить аффинное преобразование вида $x' = kx$, $y' = n(y - \alpha x - \beta)$, где α, β — определенные хотя бы «на глазомер» параметры прямой $y = \alpha x + \beta$, вдоль которой приблизительно располагается множество G: при таком преобразовании плоскости выпуклая оболочка K_G перейдет в выпуклую же оболочку $K'_{G'}$, и в то же время не будут нарушены ни отношения сопряжения, ни отношения противолежания вершин и сторон контура Г.

Во-вторых, следует подчеркнуть, что последний этап определения решения задачи, именно — нахождение численных значений коэффициентов a_0, b уравнения опорной прямой D, заключающей в себе упомянутую выше сторону P_rP_s, и половины вертикального уклонения вершины P_i от прямой D, мы предполагаем выполненным при помощи аналитического вычисления, что и оправдывает характеристику метода, как графо-аналитического.

В-третьих, мы должны заметить, что графическое отыскание нужной стороны $P'_rP'_s$ (на аффинно преобразованном контуре Г′) может быть очень быстро выполнено даже в случаях более значительного числа сторон (без необходимости испытывать все подряд стороны контура), если учесть следующий факт: при постепенном уменьшении от $+\infty$ до $-\infty$ значения углового коэффициента какой-нибудь переменной пары параллельных опорных прямых D'_1, D'_2 (отличных, вообще говоря, от искомой пары) абсциссы x' точек множества соприкосновения K'_1 прямой D'_1 с контуром Г′ могут только увеличиваться, абсциссы же точек K'_2 — только уменьшаться. Основываясь на этом факте, легко заключить величину углового коэффициента искомой пары прямых D'_1, D'_2 между двумя последовательно сближаемыми границами, и применение такого приема исследования контура Г′ сохранит свою действенность даже и в случае бесконечного множества G.

4°. Графо-аналитическое решение задач (2) и (3). *В случае задачи* (2) *строим множество* G_1 ($x = -\varphi, y = -\psi$), *сим-*

метричное множеству G *относительно начала координат, и затем выпуклую оболочку* $K \equiv K_G$, *для соединения* $G_0 = G \cup G_1$. *Если через* $P_0 \equiv (0, y_0)$ *обозначим точку пересечения положительного направления оси* Oy *с контуром* Γ_0 *выпуклой фигуры* K, *то* (*в силу известных общих фактов* ([4],[5])) *угловой коэффициент* λ_0 (*любой*) *опорной прямой* $y - y_0 = \lambda_0 x$ *множества* K *в точке* P_0 *и даст искомое решение* $\lambda = \lambda_0$ *задачи* (2). В случае неоднозначности опорной прямой (т. е. когда P_0 — особая точка контура Γ_0) таким путем получается совокупность всех решений (пучок прямых $y = \lambda_0 x$). При этом $y_0 = \rho$ (величина наилучшего приближения).

Добавим только, что фактически здесь не будет надобности строить весь контур Γ_0: нужные прямые (D) $y - y_0 = \lambda_0 x$ допускают непосредственное графическое определение (с аналитическим вычислением углового коэффициента λ_0) как опорные прямые самого множества $G_0 = G \cup G_1$, которые пересекают положительное направление оси Oy, удовлетворяя притом одному, по крайней мере, из двух следующих условий: либо прямая D проходит через две точки $(x^{(1)}, y^{(1)})$, $(x^{(2)}, y^{(2)})$ множества G_0, расположенные по обе стороны оси ординат; либо D проходит через некоторую точку $(0, y) \equiv (0, y_0)$ множества G_0, лежащую на самой оси Oy. При первом условии решение является заведомо однозначным.

В случае задачи (3) *решение* $\lambda^* = \lambda_0^*$ *получается весьма просто аналогичным образом с заменою* G *на* $G^* = \{(X, Y)\}$, *где* $Y \equiv 1$, $X \equiv x/y$.

5°. Формулировка чисто аналитического правила для решения задачи (3). Смысл требования (3) заключается, очевидно, в замене задачи (2) аналогичною задачею чебышевского типа, соответствующей критерию относительной погрешности, чем и определяется ее практическое значение. Анализ самого графо-аналитического решения задачи (3), указанного в конце п. 4°, непосредственно приводит к следующим двум формулам для прямого вычисления решения $\lambda^* = \lambda_0^*$ и для соответствующего значения ε_0^* максимальной относительной погрешности соотношения $y \approx \lambda_0^* x$:

$$\frac{1}{\lambda_0^*} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}\right)_{\max} + \left(\frac{x}{y}\right)_{\min}\right]; \quad \varepsilon_0^* = \frac{(x/y)_{\max} - (x/y)_{\min}}{(x/y)_{\max} + (x/y)_{\min}}. \tag{5}$$

Заметим, что, таким образом, *наилучшим значением параметра* λ^* *оказывается среднее гармоническое двух величин* $(y/x)_{\min}$ *и* $(y/x)_{\max}$ *на множестве* $G = \{(x, y)\}$.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
8 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Ремез, Про методи найкращого, в розумінні Чебишева, наближ. представл. функцій, вид. УАН, 1935. [2] H. Minkowski, Ges. Abh., **2**, 1911, S. 131. [3] C. Carathéodory, Rendiconti di Palermo, **32**, 193 (1911). [4] A. Haar, Math. Ann., **78**, 294 (1917/18). [5] Е. Я. Ремез, Збірник праць Інст. мат. АН УРСР, **1**, 115 (1938).