Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 3

МАТЕМАТИКА

К. Я. ЛАТЫШЕВА

О РЕШЕНИЯХ В ЗАМКНУТОМ ВИДЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 16 XII 1954)

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(x)\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} = 0 \tag{1}$$

с полиномиальными коэффициентами

$$P_i(x) = \sum_{j=\pi_i}^{\sigma_i} p_{ij}x^j,$$

где π_i и σ_i суть некоторые целые числа. Число

$$p = 1 + k, \quad k = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\sigma_i - \sigma_0}{i},$$

Пуанкаре назвал ([3]) рангом уравнения (1), а число

$$m = -1 - \varkappa, \quad \varkappa = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\pi_i - \pi_0}{i},$$

названо нами ([2]) антирангом того же уравнения; p и m могут быть любыми рациональными числами.

В настоящей статье для уравнения (1) показана возможность существования решений в замкнутом виде:

$$y = e^{Q(x)}S(x),$$

где для p и m целых $S(x)$ — рациональная функция (не обязательно целая), а функция $Q(x)$ может иметь один из видов:

$$Q(x) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{p}\frac{\tau_{p-s}x^s}{s}, & \text{когда } p>0,\ m\leqslant 0; \\ \sum_{s=1}^{m}\frac{\lambda_{m-s}}{sx^s}, & \text{когда } p\leqslant 0,\ m>0; \\ \sum_{s=1}^{p}\frac{\tau_{p-s}x^s}{s}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\lambda_{m-s}}{sx^s}, & \text{когда } p>0,\ m>0; \\ 0, & \text{когда } p\leqslant 0,\ m\leqslant 0; \end{cases} \tag{2}$$

τ_{p-s}, λ_{m-s} — определенные постоянные. Если p и m — дробные числа, то в функции $S(x)$ и $Q(x)$ независимая переменная входит в дробных степенях.

Не ограничивая общности, рассуждения можно проводить только для целых значений ранга и антиранга. Действительно, если $p = p_1/\mu$ или $m = m_1/\mu$, где p_1 и μ или m_1 и μ — взаимно простые числа, то образование независимой переменной $x = t^{\mu}$ сводит уравнение (1) к такому, ранг и антиранг которого суть целые числа ([1]).

Для доказательства применим к уравнению (1) преобразование

$$y = u \exp Q(x),$$

где выражение функции $Q(x)$ берется согласно (2), но с неопределенными коэффициентами τ_{p-s} и λ_{m-s}; для определения функции u получаем дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} R_i(x) \frac{d^{n-i}u}{dx^{n-i}} = 0 \tag{3}$$

также с полиномиальными коэффициентами. Для определения неизвестных τ_{p-s} и λ_{m-s} пользуются тем, что коэффициенты многочлена $R_n(x)$ содержат их в своем выражении. Приравнивая нулю коэффициенты при наивысших (соответственно, при наинизших) степенях независимого переменного в функции $R_n(x)$, получаем уравнения для определения τ_{p-s} (соответственно, λ_{m-s}). В результате решения системы полученных уравнений найдем l ([1–3]) ($0 \leqslant l \leqslant n$) систем значений величин

$$\tau_0^{(i)}, \tau_1^{(i)}, \ldots, \tau_{p-1}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, l), \tag{4}$$

соответственно

$$\lambda_0^{(i)}, \lambda_1^{(i)}, \ldots, \lambda_{m-1}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, l), \tag{5}$$

и, следовательно, столько же различных выражений функции $Q(x)$.

Соответственно каждой системе значений (4), (5) коэффициенты $R_j(x)$ уравнения (3) имеют свои, отличные от других, выражения $R_j^{(i)}(x)$ ($i = 0, 1, \ldots, l$; $j = 0, 1, \ldots, n$), и, следовательно, каждой из систем значений (4), (5) соответствует свое значение u_i ($i = 0, 1, \ldots, l$; $l \leqslant n$).

Если решения уравнения (3) имеют полюсы $\xi_1, \ldots, \xi_{\mu}$ ($0 < \mu < \infty$) на конечном расстоянии, кратности которых равны, соответственно, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\mu}$, то к уравнению (3) применяют преобразование

$$u = \frac{v}{(x-\xi_1)^{\gamma_1} \ldots (x-\xi_{\mu})^{\gamma_{\mu}}}, \tag{6}$$

где v — новая функция, определяемая дифференциальным уравнением

$$\mathscr{L}[v] \equiv \sum_{i=0}^{n} D_i(x) \frac{d^{n-i}v}{dx^{n-i}} = 0. \tag{7}$$

В силу преобразования (6) решения уравнения (7) не имеют полюсов на конечном расстоянии.

Подставляя вместо v в левую часть уравнения (7) x^r с неопределенным r, получают

$$\mathscr{L}[x^r] = x^{r+\tau}\{f_0(r) + xf_1(r) + \ldots + x^{\nu}f_{\nu}(r)\},$$

где τ — определенное число, а ν конечно в силу полиномиальности функций $D_i(x)$.

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ (соответственно через $\beta_1, \beta_2, \ldots$) корни уравнения $f_0(r)=0$ (соответственно уравнения $f_\nu(r)=0$).

Условия существования у уравнения (7) многочленного решения вида

$$v = x^\alpha (a_0 + a_1 x + \ldots + a_q x^q), \tag{8}$$

где $\alpha, a_0, \ldots, a_q$ — определенные постоянные, q — целое неотрицательное число, даются следующей теоремой:

Если из совокупности разнящихся на целые числа корней α_i уравнения $f_0(r)=0$ и корней β_j уравнения $f_\nu(r)=0$ может быть выделена группа корней, расположенных в одном из следующих порядков

а) $\beta_{\lambda-1} < \alpha_{i_1} < \alpha_{i_2} < \ldots < \alpha_s < \ldots < \alpha_{i_\tau} \leqslant \beta_\lambda \quad (1 \leqslant \tau \leqslant n)$;

б) $\alpha_s \leqslant \beta_{j_1} < \beta_{j_2} < \ldots < \beta_\lambda < \ldots < \beta_{j_\mu} < \alpha_{s+1} \quad (1 \leqslant \mu \leqslant n)$,

то для того, чтобы в случае а) *дифференциальное уравнение* (7) *имело решение* (8), *необходимо и достаточно, чтобы $q = \beta_\lambda - \alpha_s$, где целое неотрицательное число $\beta_\lambda - \alpha_s$ по величине наименьшее из всех $\beta_\lambda - \alpha_i$; α_i — те элементы неравенства* а), *для которых ранг матрицы $N(\alpha_i, \beta_\lambda)$ равен разности $\beta_\lambda - \alpha_i$;*

$$N(\alpha,\beta) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & f_0(\alpha+1) & f_1(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f_0(\alpha+2) & f_1(\alpha+1) & f_2(\alpha) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & f_{\nu-2}(\alpha+2) & f_{\nu-1}(\alpha+1) & f_\nu(\alpha) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & 0 \\ f_0(\beta) & f_1(\beta-1) & f_2(\beta-2) & \ldots & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & 0 \\ f_{\nu-1}(\beta) & f_\nu(\beta-1) & 0 & \ldots & \cdot & \cdot & 0 \end{Vmatrix}.$$

Для случая б) *целое неотрицательное число $\beta_\lambda - \alpha_s$ должно быть по величине наименьшим из разностей $\beta_j - \alpha_s$, где β_j — те элементы неравенства* б), *для которых ранг матрицы $N(\alpha_s, \beta_j)$ равен разности $\beta_j - \alpha_s$.*

Если совокупность величин α_i и β_j разобьется на l групп типов а) *и* б), *причем в каждой из них найдутся свои α_s и β_λ, удовлетворяющие указанным условиям, то дифференциальное уравнение* (7) *допускает l ($\leqslant n$) решений вида* (8).

Пусть уравнение (7) имеет решение вида (8). Тогда, возвращаясь к уравнению (1), находим для него решение

$$y = e^{Q(x)} \frac{x^\alpha (a_0 + a_1 x + \ldots + a_q x^q)}{(x-\xi_1)^{\gamma_1} \ldots (x-\xi_\mu)^{\gamma_\mu}}, \tag{9}$$

являющееся рациональной функцией, если $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ — целые числа. Соответственно каждому решению уравнения (7) вида (8) может существовать столько решений уравнения (1) вида (9), сколько различных выражений имеет соответствующая функция $Q(x)$.

Пример. Уравнение

$$xy^{IV} - 2y^{III} - 2xy^{II} + 2y' + xy = 0$$

имеет частные решения:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^x(x^2 - 3x), \quad y_3 = e^{-x}, \quad y_4 = e^{-x}(x^2 + 3x).$$

Предположим теперь, что ранг или антиранг (или оба вместе) — дробные числа. При помощи указанного выше преобразования получаем новое дифференциальное уравнение с целым рангом и антирангом и новой независимой переменной t. Это уравнение, возможно, имеет решение вида (9). Тогда, возвращаясь к старой переменной x, найдем нерациональные решения в замкнутом виде уравнения (1).

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
27 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Я. Латышева, Научн. зап. КГУ, Матем. сборн., № 3, **79** (1949). [2] К. Я. Латышева, там же, № 3, 95 (1949). [3] К. Я. Латышева, там же, № 4, 51 (1950). [4] H. Poincaré, Acta Math., 8 (1886).