Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 3

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ВРАЩЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ НА n-МЕРНОЙ СФЕРЕ

(Представлено академиком П. С. Александровым 20 XII 1954)

1. В настоящей статье доказывается теорема о вращении векторных полей, содержащая, как частные случаи, известную теорему Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана — К. Борсука ([1], [2]) об антиподах и один недавний результат А. И. Фета ([3], [4]).

Ниже употребляются следующие обозначения: U — периодическое гомеоморфное отображение n-мерной единичной сферы S^n на себя; p — период отображения U ($U^p x = x$ при $x \in S^n$); γ_U — степень отображения U.

$\tilde{U}$-преобразование $(n+1)$-мерного пространства R^{n+1} на себя, определенное формулой

$$\tilde{U}x = \|x\| U(x/\|x\|) \quad (x \neq 0), \qquad \tilde{U}0 = 0,$$

где 0 — нуль пространства R^{n+1}, $\|x\|$ — норма элемента $x \in R^{n+1}$. Пространство R^{n+1} без ограничения общности можно считать евклидовым.

V — периодическое гомеоморфное преобразование R^{n+1} на себя, степень которого равна γ_V, период равен q, причем p кратно q и $\|Vx\| = \|x\|$ $(x \in R^{n+1})$.

Теорема 1. *Пусть все преобразования $U, U^2, \ldots, U^{p-1}$ не имеют неподвижных точек. Пусть Φ, Ψ — непрерывные векторные поля без нулевых векторов на S^n, которые удовлетворяют условиям*

$$\Phi Ux = V\Phi x, \quad \Psi Ux = V\Psi x \quad (x \in S^n). \tag{1}$$

Тогда

$$\gamma_\Phi = \gamma_\Psi \pmod p, \tag{2}$$

если $\gamma_U \cdot \gamma_V = 1$, и

$$\gamma_\Phi = \gamma_\Psi, \tag{3}$$

если $\gamma_U \cdot \gamma_V = -1$.

Через γ_Φ (аналогично, через γ_Ψ) обозначено вращение поля Φ на сфере S^n, т. е. степень отображения $\Phi x/\|\Phi x\|$ сферы S^n на себя.

Если в сформулированной теореме положить $U = V = -I$, $\Psi = I$ (где I — тождественное преобразование), то утверждение теоремы превращается в утверждение теоремы Люстерника — Шнирельмана — Борсука: если поле Φ на S^n нечетно ($\Phi(-x) = -\Phi x$), то вращение его нечетно и, следовательно, оно не может быть непрерывно продолжено внутрь сферы без нулевых векторов.

Пусть U — инволюционное отображение без неподвижной точки. Положим $V = -I$, $\Psi = I - U$. Тогда из теоремы 1 вытекает следующее утверждение: если $\Phi Ux = -\Phi x$ $(x \in S^n)$, то вращение поля Φ не-

четно. А. И. Фетом доказано, что в рассмотренном случае вращение поля Φ отлично от нуля (чтобы перейти к формулировке Фета, нужно совершить очевидный переход к гомотопным полям).

Пусть U — снова инволюционное отображение без неподвижной точки. Положим $V = I$, $\Psi = \text{const}$. Тогда из теоремы 1 вытекает, что вращение поля Φ, удовлетворяющего условию $\Phi Ux = \Phi x$, будет четным числом, всегда равным нулю в случае, когда сфера четномерна.

Нетрудно указать другие многочисленные следствия из теоремы 1, задаваясь различными U, V, Ψ.

2. Ниже будут использованы следующие вспомогательные предложения, которые либо известны, либо почти очевидным образом вытекают из известных фактов ([5-7]).

Лемма 1. *Пусть на границе связной ограниченной области n-мерного пространства задано n-мерное непрерывное векторное поле без нулевых векторов. Тогда это поле можно непрерывно продолжить на всю область с единственной неподвижной точкой (нулевым вектором).*

Если на границе ограниченной области n-мерного пространства задано векторное поле большей чем n размерности, то это поле можно продолжить на всю область без нулевых векторов.

Индексом γ_x неподвижной точки x векторного поля Φ называют вращение поля Φ на сферах малого радиуса с центром в x.

Лемма 2. *Пусть непрерывное векторное поле Φ в закрытой ограниченной области G имеет конечное число неподвижных точек $x_1, x_2, \ldots, x_r$, не лежащих на границе Γ области G. Тогда вращение поля Φ на Γ равно $\gamma_{x_1} + \gamma_{x_2} + \ldots + \gamma_{x_r}$.*

Лемма 3. *Пусть W — гомеоморфное отображение области G на область G_1 степени γ_W (1 или -1). Пусть x — изолированная неподвижная точка поля Φ в области G, имеющая индекс γ_x. Тогда индекс γ_y неподвижной точки $y = Wx$ поля ΦW^{-1} равен $\gamma_x \cdot \gamma_W$.*

Лемма 4. *Пусть γ_x — индекс неподвижной точки x поля Φ. Тогда индекс этой же неподвижной точки поля $W\Phi$ равен $\gamma_x \cdot \gamma_W$, где γ_W — степень отображения W, удовлетворяющего условию $Wu = 0$ только при $x = 0$.*

3. Доказательство теоремы 1. Пусть T — шаровой слой $1 \leqslant \|x\| \leqslant 2$. Граница этого слоя состоит из сфер S_1 и S_2 радиусов 1 и 2. Если $M \subset S_1$, то через $\hat{M}$ обозначается множество тех $x \in T$, для которых $x/\|x\| \in M$.

Пусть K — настолько мелкое симплициальное разбиение сферы S_1, что каждый замкнутый симплекс Σ не пересекается с множествами $U\Sigma, U^2\Sigma, \ldots, U^{p-1}\Sigma$. Через Π обозначим совокупность точек всех $(n-1)$-мерных замкнутых симплексов комплекса K. Пусть $F = \Pi + U\Pi + \ldots + U^{p-1}\Pi$. Множество F будет инвариантно относительно преобразования U.

Пусть $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$ — n-мерные замкнутые симплексы комплекса K, границы которых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Построим на $\hat{\Gamma}_1$ поле $\tilde{\Phi}$ без нулевых векторов, совпадающее с Φ на Γ_1 и с Ψ на $\hat{\Gamma}_1 \cap S_2$. Такое поле можно построить в силу леммы 1, так как Γ_1 n-мерно. Затем определим поле $\tilde{\Phi}$ на множествах $\tilde{U}^i\Gamma$ равенством

$$\tilde{\Phi}\tilde{U}^i x = V^i \tilde{\Phi} x \quad (i = 1, \ldots, p-1). \tag{4}$$

Пусть поле $\tilde{\Phi}$ уже построено на $\hat{\Gamma}_1 + \ldots + \tilde{U}^{p-1}\hat{\Gamma}_1 + \ldots + \Gamma_{j_0} + \ldots + \tilde{U}^{p-1}\Gamma_{j_0}$ так, что оно не имеет нулевых векторов, совпадает с Φx при $x \in S_1$ и с полем $\Psi(x/\|x\|)$ при $x \in S_2$, удовлетворяет условию

(4). Тогда это поле будет определено на некоторой замкнутой части множества Γ_{j_0+1}. Продолжим его с этой замкнутой части на все Γ_{j_0+1} без нулевых векторов, а затем это поле определим и на множествах $\tilde{U}^i \Gamma_{j_0+1}$, пользуясь формулой (4).

Таким образом, после конечного числа шагов мы построим непрерывное векторное поле $\tilde{\Phi}$, определенное на $\hat{F} + S_1 + S_2$, не имеющее нулевых векторов, совпадающее с Φ на S_1, с Ψ на S_2, удовлетворяющее условию (4) в тех точках, в которых поле определено.

Обозначим через $\tilde{\Phi}_1$ произвольное непрерывное продолжение поля $\tilde{\Phi}$ на T, удовлетворяющее условию (4). Такое продолжение проще всего построить, определяя его последовательно на множествах $\hat{\Sigma}_i$.

Множество $\hat{F} + S_1 + S_2$ разбивает T на не более чем счетное число связных компонент. Лишь в конечном числе $G_1, \ldots, G_r$ этих компонент будут нулевые векторы поля $\tilde{\Phi}_1$, так как в противном случае нулевые векторы были бы и на $\hat{F}$, на котором продолженное поле совпадает с полем $\tilde{\Phi}$, не имеющим нулевых векторов. Через $\tilde{\Phi}_2$ обозначим поле, определенное только на $T - \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ и совпадающее на этом множестве с $\tilde{\Phi}_1$.

Легко видеть что система $G_1, \ldots, G_r$ может быть записана в виде $G_1, G_2, \ldots, G_s;\ \tilde{U}G_1, \tilde{U}G_2, \ldots, \tilde{U}G_s; \ldots; \tilde{U}^{p-1}G_1, \tilde{U}^{p-1}G_2, \ldots, \tilde{U}^{p-1}G_s$. На границе каждой области G_i поле $\tilde{\Phi}_2$ определено. В силу леммы 1 поле $\tilde{\Phi}_2$ можно продолжить на $G_1 + \ldots + G_s$ так, чтобы в каждом G_i продолженное поле имело единственную неподвижную точку x_i. На $\tilde{U}(G_1 + \ldots + G_s), \ldots, \tilde{U}^{p-1}(G_1 + \ldots + G_s)$ поле $\tilde{\Phi}_2$ продолжим так, чтобы оно удовлетворяло условию (4). За продолженным полем сохраним обозначение $\tilde{\Phi}_2$.

Поле $\tilde{\Phi}_2$, определенное на всем T, будет обладать следующими свойствами: оно совпадает с Φ на S_1, с Ψ на S_2, имеет конечное число неподвижных точек $x_1, \ldots, x_s;\ \tilde{U}x_1, \ldots, \tilde{U}x_s; \ldots; \tilde{U}^{p-1}x_1, \ldots, \tilde{U}^{p-1}x_s$, удовлетворяет на всем T условию (4).

Вращение поля $\tilde{\Phi}_2$ на границе T равно $\gamma_\Psi - \gamma_\Phi$. Поэтому (лемма 2)

$$\gamma_\Psi - \gamma_\Phi = \gamma_{x_1} + \ldots + \gamma_{x_s} + \gamma_{\tilde{U}x_1} + \ldots + \gamma_{\tilde{U}x_s} + \ldots + \gamma_{\tilde{U}^{p-1}x_1} + \ldots + \gamma_{\tilde{U}^{p-1}x_s}. \tag{5}$$

В силу лемм 3 и 4

$$\gamma_{\tilde{U}x_i} = \gamma_{x_i} \cdot \gamma_V \cdot \gamma_{\tilde{U}} = \gamma_{x_i} \cdot \gamma_V \cdot \gamma_U,$$

откуда

$$\gamma_{\tilde{U}^j x_i} = \gamma_{x_i} \cdot \gamma_V^j \cdot \gamma_U^j.$$

Подставляя полученное выражение для $\gamma_{\tilde{U}^j_{xi}}$ в (5), получим

$$\gamma_\Psi - \gamma_\Phi = (\gamma_{x_1} + \ldots + \gamma_{x_s})(1 + \gamma_U \cdot \gamma_V + \ldots + \gamma_U^{p-1} \cdot \gamma_V^{p-1}). \tag{6}$$

Из (6) вытекают утверждения теоремы 1. Действительно, если $\gamma_U \cdot \gamma_V = 1$, то

$$\gamma_\Psi - \gamma_\Phi = p(\gamma_{x_1} + \ldots + \gamma_{x_s}).$$

Если же $\gamma_U \cdot \gamma_V = -1$, то p обязательно четно, ибо

$$\gamma_{x_i} = \gamma_{U^p x_i} = (\gamma_U \cdot \gamma_V)^p \gamma_{x_i} = (-1)^p \gamma_{x_i}.$$

В этом случае $1 + \gamma_U \gamma_V + \ldots + (\gamma_U \gamma_V)^{p-1} = 0$ и, следовательно, $\gamma_\Psi = \gamma_\Phi$.

4. Изложенный выше прием позволяет доказывать и другие утверждения, аналогичные теореме 1. Если, например, предположить, что оператор U обладает некоторыми свойствами гладкости, то без труда может быть ослаблено предположение о том, что операторы $U, \ldots, U^{p-1}$ не имеют неподвижных точек. Приведем один пример.

Теорема 2. *Пусть существует такое симплициальное разбиение K сферы S^n, что преобразование U аффинно преобразует каждый симплекс комплекса K в некоторый симплекс этого же комплекса. Пусть преобразования $U, U^2, \ldots, U^{q-1}$ не имеют неподвижных точек (q — период гомеоморфизма V). Пусть, наконец, выполнено условие* (1) *теоремы* 1.

Тогда справедливы и утверждения теоремы 1.

Воронежский государственный
университет

Поступило
20 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930. [2] K. Borsuk, Fund. Math., 20, 177 (1933). [3] А. И. Фет, Тр. Воронежск. семинара по функц. анализу, в. 1 (1954). [4] А. И. Фет, ДАН, 95, № 6, 1149 (1954). [5] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М.—Л., 1947. [6] Г. Зейферт, В. Трельфалль, Топология, М.—Л., 1938. [7] Ж. Лерей, Ю. Шайдер, Усп. матем. наук, в. 13—14, 71 (1946).