Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 3

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ПОЛИНОМАМИ С. Н. БЕРНШТЕЙНА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

1°. Будем пользоваться обозначениями из ([1]). Обозначим через $A_n(f, x)$ интерполяционный полином С. Н. Бернштейна ([2]) степени $(n-1)$, построенный для корней полинома П. Л. Чебышева $T_n(x) = \cos n \arccos x$ и функции $f(x)$, определенной в $[-1, 1]$.

Как известно,

$$A_n(f, x) = \sum_{j=1}^{n}{}' f(x_j) r_j(x), \quad r_j(x) = l_j(x) + (-1)^{j-1} l_{2pt_j}(x).$$

Штрих указывает, что j принимает все целые значения от 1 до n, за исключением чисел, кратных $2p$.

Полиномы $A_n(f, x)$ обладают двумя важными свойствами:

1. Для любой непрерывной в $[-1, 1]$ функции $f(x)$ имеет место равномерно соотношение

$$A_n(f, x) \to f(x), \quad n \to \infty, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1}$$

2. Отношение степени полинома $A_n(f, x)$ к числу его узлов сколь угодно близко к 1, если только p достаточно велико *.

2°. Обозначим через $\omega_f(h) = \omega(h)$ модуль непрерывности функции $f(x)$.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ непрерывна в $[-1, 1]$; тогда*

$$|A_n(f, x) - f(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 16p\sqrt{2}\,\omega\left(\frac{4p\pi}{n}\right) + \pi^2 |T_n(x)| \sum_{k=1}^{[n/2p]} \frac{\omega\left(\frac{2p(k+1)}{n}\right)}{k^2} + 4p\,|T_n(x)|\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Так как $\sum_{j=1}^{n}{}' r_j(x) = 1$, то $f(x) - A_n(f, x) = \sum_{j=1}^{n}{}' [f(x) - f(x_j)] r_j(x)$.

Стало быть,

$$|f(x) - A_n(f, x)| \leqslant \sum_{x_j \leqslant x}{}' E_j + \sum_{x_j > x}{}' E_j \equiv S_1 + S_2;$$

$$E_j = \omega(|x - x_j|)\,|r_j(x)|. \tag{3}$$

* Автору не известны другие полиномы, обладающие указанными двумя свойствами.

Мы будем рассматривать S_2, для S_1 рассуждения аналогичны. Допустим, что

$$x_s < x < x_{s+1}, \quad 2pq \leqslant s+1 < 2p(q+1), \quad n = 2pm + r, \quad 0 \leqslant r < 2p.$$

Очевидно, что

$$S_2 = \sum_{j=s+1}^{2p(q+2)-1} E_j + \sum_{j=2p(q+2)+1}^{2pm}{}' E_j + \sum_{j=2pm+1}^{n} E_j \equiv \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \tag{4}$$

Оценим σ_1. Заметим ([3]), что

$$|r_j(x)| \leqslant 2\sqrt{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Кроме того, при $s+1 \leqslant j \leqslant 2p(q+2)-1$

$$\cos\theta_j - \cos\theta < \cos\theta_j - \cos\theta_s \leqslant \frac{4p\pi}{n}.$$

Поэтому

$$\sigma_1 \leqslant 8p\sqrt{2}\,\omega\left(\frac{4p\pi}{n}\right). \tag{5}$$

Переходим к оценке σ_2. После простых вычислений получим

$$\sigma_2 = \frac{|T_n(x)|}{n} \sum_{j=2p(q+2)+1}^{2pm}{}' \omega(|\cos\theta_j - \cos\theta|) \frac{1}{\sin\dfrac{\theta-\theta_j}{2}} \left| \frac{\sin^{1/2}(\theta_j - \theta_{2pt_j})}{\sin^{1/2}(\theta - \theta_{2pt_j})} \right| \psi_j(\theta), \tag{6}$$

где $x = \cos\theta$, $x_j = \cos\theta_j = \cos\dfrac{2n-2j+1}{2n}\pi$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\psi_j(\theta) = \frac{\left|\cos\dfrac{\theta_j - \theta_{2pt_j}}{2} - \cos\theta\cos\dfrac{\theta_j + \theta_{2pt_j}}{2}\right|}{2\sin\dfrac{\theta+\theta_j}{2}\sin\dfrac{\theta_j+\theta_{2pt_j}}{2}}. \tag{7}$$

Заметим, что

$$\left(\sin\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)^{-1} \leqslant \left(\sin\frac{\theta_{s+1}-\theta_j}{2}\right)^{-1}, \quad s+1 < j \leqslant n. \tag{8}$$

Так как

$$\left|\sin\frac{\theta_{s+1}-\theta_j}{2}\right| \geqslant \frac{j-(s+1)}{n}, \quad j > s+1,$$

то из (8) следует

$$\left(\sin\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)^{-1} \leqslant \frac{n}{j-s-1}, \quad j > s+1. \tag{9}$$

Можно убедиться, что (1)

$$\frac{\sin^{1}/_{2}(\theta_j-\theta_{2pt_j})}{\sin^{1}/_{2}(\theta-\theta_{2pt_j})}\leqslant\frac{p\pi}{2pt_j-s-1}; \tag{10}$$

$$\psi_j(\theta)\leqslant 2\pi p. \tag{11}$$

Из (6), (9), (10), (11) следует

$$\sigma_2\leqslant 2p^2\pi^2\,|\,T_n(x)\,|\sum_{j=2p(q+2)+1}^{2pm}{}'\,\omega(|\cos\theta_j-\cos\theta\,|)\,\frac{1}{(j-s-1)(2pt_j-s-1)}.$$

Заметим, что

$$0<\cos\theta_j-\cos\theta\leqslant\theta-\theta_j<\theta_s-\theta_j=\frac{j-s}{n}\pi.$$

Следовательно,

$$\omega(|\cos\theta_j-\cos\theta\,|)\leqslant\omega\left(\frac{j-s}{n}\pi\right). \tag{12}$$

Стало быть,

$$\sigma_2\leqslant 2p^2\pi^2\,|\,T_n(x)\,|\sum_{i=q+3}^{m}\sum_{j=2p(i-1)+1}^{2pi-1}\frac{\omega\left(\frac{j-s}{n}\pi\right)}{(j-s-1)(2pt_j-s-1)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi^2}{2}\,|\,T_n(x)\,|\sum_{k=1}^{[n/2p]}\frac{\omega\left(\frac{2p(k+1)}{n}\right)}{k^2}. \tag{13}$$

Остается оценить σ_3:

$$\sigma_3=\sum_{j=2pm+1}^{2pm+r}\frac{|\,T_n(x)\,|}{n}\,\frac{\sin\theta_j}{\cos\theta_j-\cos\theta}\,\omega(|\cos\theta_j-\cos\theta\,|). \tag{14}$$

Легко видеть, что

$$\frac{\sin\theta_j}{\cos\theta_j-\cos\theta}\leqslant\frac{n}{j-s-1}.$$

Поэтому из (12) и (14) вытекает, что

$$\sigma_3\leqslant\frac{|\,T_n(x)\,|}{n}\sum_{j=2pm+1}^{2pm+r}\frac{n}{j-s-1}\,\omega\left(\frac{j-s}{n}\pi\right). \tag{15}$$

Так как $\omega\left(\frac{j-s}{n}\pi\right)\leqslant(j-s)\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$, то из (15) следует

$$\sigma_3\leqslant 2p\,|\,T_n(x)\,|\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{16}$$

Очевидно, что из (3), (4), (5), (13) и (16) вытекает теорема.

Замечание 1. Если $\omega_f(\delta)\leqslant K(f)\,\delta^{\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 1$, то из (2) следует теорема из (1).

Замечание 2. Из (2) легко следует результат С. Н. Бернштейна, что для любой непрерывной в $[-1, 1]$ функции выполняется равномерно (1).

Замечание 3. Легко видеть, что

$$\sum_{k=1}^{[n/2p]} \frac{\omega(k/n)}{k^2} < \frac{2}{n} \int_{1/n}^{1/p} \frac{\omega(x)}{x^2} dx.$$

Поэтому из (2) следует, что

$$|A_n(f, x) - f(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 16p\sqrt{2}\,\omega\left(\frac{4p\pi}{n}\right) + \frac{8p\pi^2}{n} |T_n(x)| \int_{1/n}^{1/p} \frac{\omega(x)}{x^2} dx + 4p |T_n(x)|\, \omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (17)$$

3°. Пусть функция $\omega(t)$ удовлетворяет условиям:
1) $\omega(t)$ непрерывна при $0 \leqslant t < \infty$.
2) При $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ $\quad 0 \leqslant \omega(t_1) \leqslant \omega(t_2)$.
3) $\omega(0) = 0$.
4) $\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$.

Обозначим через C_ω множество тех непрерывных в $[-1, 1]$ функций $f(x)$, для которых

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant K(f)\omega(h), \quad -1 \leqslant x \leqslant x + h \leqslant 1,$$

где константа $K(f)$ зависит лишь от f.

Теорема 2. *При $p = 1$ существует такая $f^* \in C_\omega$, что*

$$|A_n(f^*, 0) - f^*(0)| > \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{n} \int_{1/n}^{1} \frac{\omega(x)}{x^2} dx.$$

Из этой теоремы следует, что оценки (2) и (17) точны относительно n.

Новгородский государственный
педагогический институт

Поступило
24 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Л. Берман, ДАН, 85, № 3 (1952). [2] С. Н. Бернштейн, Собр. соч., 2, 1954. [3] Д. Л. Берман, ДАН, 60, № 3 (1948).