Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 1

ФИЗИКА

Н. Н. КОЛЕСНИКОВ

ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЯДЕР

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 8 IV 1955)

В работе (1) для объяснения ядерных периодичностей был использован статистический метод Томаса — Ферми. Далее было показано существование связи между порядком заполнения ядерных оболочек и плотностью распределения нуклонов в ядре (2) и были сделаны попытки найти параметры нуклонной плотности (3). Впоследствии выяснилось, однако (4), что авторы работ (3) использовали схему заполнения ядерных оболочек, противоречащую экспериментальным данным (5,6).

Ниже мы рассмотрим те общие условия, которым должен удовлетворять вид ρ благодаря существованию эмпирической связи между значениями чисел нуклонов N_l, после которых впервые появляются состояния с данными l, и орбитальными моментами l.

1. Статистическая теория приводит к следующему выражению для числа частиц n_l в состоянии с орбитальным моментом l (7):

$$n_l = \frac{8}{h}(l+1/2)\int_{r_1}^{r_2}\{P^2(r)\,r^2 - M^2\}^{1/2}\,\frac{dr}{r}; \qquad (1)$$

r_1 и r_2 — корни уравнения

$$P^2(r)\,r^2 - M^2 = 0. \qquad (2)$$

Так как

$$P = \hbar(3\pi^2)^{1/3}\rho^{1/3}, \quad M^2 = \hbar^2 l(l+1), \qquad (3)$$

то (2) приводится к виду:

$$\rho(r)\,r^3 = \frac{1}{24\pi^2}\{4l(l+1)\}^{3/2}. \qquad (4)$$

Если $r_1 = r_2$, то, кроме (4), должно выполняться еще условие

$$\frac{d}{dr}\{\rho(r)\,r^3\} = 0. \qquad (5)$$

Это условие соответствует тому случаю, когда нуклоны с данными l еще не появились.

Положим теперь, что

$$|\rho(r)\,r^3|_{\max} = \frac{N_l}{24\pi^2\gamma}, \qquad (6)$$

где γ — параметр, характеризующий плотность распределения нуклонов, который, вообще говоря, зависит от N_l; $r_{\max}$ определяется из (5). N_l должно также удовлетворять условию нормировки

$$N_l = 4\pi\int_0^\infty \rho(r)\,r^2\,dr. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что

$$N_l = \gamma\{4l(l+1)\}^{3/2}.$$

На основании эмпирических данных известна зависимость между N_l и l. Далее мы будем считать ([5,6]), что состояние с $l=0$ появляется впервые у 1-го нуклона, т. е. $N_0=0$; $N_1=2$; $N_2=8$; $N_3=20$; $N_4=40$; $N_5=70$; $N_6=112$. При помощи этих данных и (8) легко найти зависимость γ от N_l. Для этой цели удобно использовать графическое изображение (см. рис. 1), при помощи которого была найдена зависимость γ от N_l для схемы заполнения ядерных оболочек, а также для случая атома (в случае атома $N_0=0$, $N_1=4$, $N_2=20$, $N_3=57$ ([7,8])).

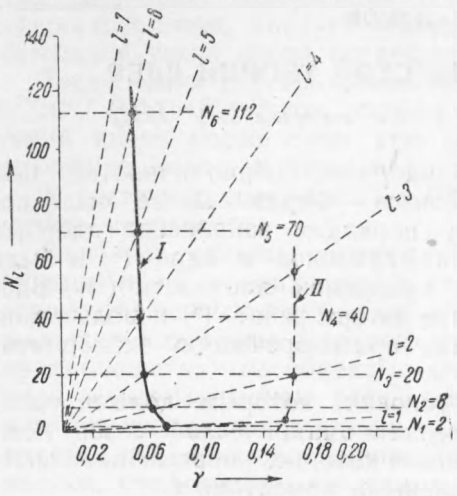


Рис. 1. Зависимость N_l от γ. I — для ядер, II — для атомов

В случае схемы Майер ([5]) зависимость γ от N_l может быть передана следующей эмпирической формулой:

$$\gamma \approx 0{,}06 - 0{,}0001015\, N_l + \\ +0{,}000000286\, N_l^2. \qquad (9)$$

Можно показать, что условия (7), (8), (6), а также эмпирическое требование, чтобы γ было заключено в границах 0,05—0,08, уже приводят к некоторым выводам о характере распределения плотности нуклонов в ядре. Так как $\frac{4\pi}{3}\rho(r_{\max})\,r^3_{\max}=N'$ представляет собой число нуклонов, распределенных с плотностью $\rho(r_{\max})$ в сфере радиуса $r_{\max}$, то, согласно (6), получим:

$$\frac{N'}{N}=\frac{1}{18\pi\gamma}\sim 0{,}35\div 0{,}22.$$

Этот результат говорит о том, что характер распределения нуклонной плотности значительно отличается от равномерного. Априори возможны два крайних случая распределения нуклонов: либо нуклоны расположены в основном на малых расстояниях, либо же большая часть нуклонов располагается на границе ядра — там, где нуклонная плотность испытывает резкий спад, — а на малых расстояниях нуклонная плотность будет более или менее постоянной. Исключая маловероятный первый случай, не согласующийся с экспериментальными значениями эффективных радиусов ядер, разумно принять, что $\rho(r)$ примерно постоянно вплоть до некоторых $r=R^0$, а затем более или менее быстро спадает.

Далее можно показать, что если $\rho(r)$ является однопараметрической кривой вида

$$\rho=\rho_0 f(\alpha r)=\rho_0 f(x)$$

(например, $\rho=\rho_0\exp(-\alpha r)$ и т. д.), то γ не могло бы зависеть от N_l, что, однако, согласно рис. 1, имеется в действительности. В связи с этим было рассмотрено несколько видов $\rho(r)$, причем выяснилась непригодность борн-янговской плотности ([3]). Одним из рассмотренных нами и удовлетворяющих условию (9) законов изменения $\rho(r)$, соответствующих центральной области постоянной плотности и поверхностной области с быстрым спадением ρ, является распределение

$$\rho(r)=\begin{cases}\rho_0=\text{const} & \text{при } r<R^0;\\ \rho_0\, e^{-(x-x_0)} & \text{при } r>R^0.\end{cases} \qquad (x=\alpha r,\ x_0=\alpha R_0) \qquad (10)$$

В этом случае мы получаем следующее выражение для определения γ (при использовании (5), (6), (7)):

$$\gamma = \frac{e^3}{486\,\pi}\,\frac{x_0^3+3x_0^2+6x_0+6}{e^{x_0}}. \qquad (11)$$

Графическое решение уравнения (10) при учете эмпирической зависимости γ от N_l дало следующее выражение для $x_0 = f(N)$:

$$x_0 = \alpha R^0 = 2{,}55 + 0{,}0038\,N_l. \qquad (12)$$

Другим видом $\rho(r)$, удовлетворяющим эмпирическому требованию (9), является распределение ([10])

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r < R_0 \\ \rho_0 \dfrac{R_0^2}{r^2}\, e^{-(x-x_0)}, & r > R_0. \end{cases} \qquad (10\,\text{а})$$

В этом случае $\gamma = \dfrac{x_0}{18\,\pi\,(3+x_0)}$

$$x_0 = \alpha R_0 \approx 1{,}31 + 0{,}004\,N_l. \qquad (12\text{а})$$

Соотношения (12) и (12а) устанавливают связь между α и R_0 для распределений (10) и (10а), соответственно. Эти соотношения относятся как к протонам, так и к нейтронам, если считать, что и у тех и у других числа первого появления одинаковы. Если далее предположить, что радиусы части постоянной плотности R_0 одинаковы и у нейтронов и у протонов, то при $N > Z$ толщина протонного поверхностного слоя оказывается несколько больше, чем нейтронного, поскольку спадание протонной плотности происходит несколько медленнее, чем нейтронной. Если, кроме того, считать что $R_0 \sim A^{1/3}$, то эффективные радиусы ядра как в отношении распределения нейтронов, так и протонов оказываются растущими несколько медленнее, чем по закону $A^{1/3}$, что в особенности должно проявляться у тяжелых ядер.

II. Рассмотрим теперь характер распределения нуклонов с различными l в ядре, используя, например, ρ вида (10).

Расстояния r_{1l} и r_{2l}, начиная с которых впервые появляются протоны (нейтроны) с данными l, определяются из условия (4), которое для области постоянной плотности принимает вид

$$\left(\frac{r_{1l}}{R^0}\right)^3 = \frac{1}{3\pi^2\xi}\,\{l(l+1)\}^{3/2} \qquad (13)$$

и для экспоненциальной части

$$\left(\frac{r_{2l}}{R^0}\right)^3 = \frac{e^{\alpha(r_{2l}-R^0)}}{3\pi^2\xi}\,\{l(l+1)\}^{3/2}, \quad \xi = \rho_0 (R^0)^3. \qquad (14)$$

Подставляя численные значения l и Z в приведенные выше формулы, мы нашли те r_{1l} и r_{2l}, между которыми могут заполняться протонные (нейтронные) состояния с данными l.

Будем далее считать, что внутренние слои в ядрах мало изменяются после добавления новых внешних слоев. Тем самым предполагается, что и для внутренних слоев остается справедливым соотношение типа (11):

$$\alpha_l R_l^0 = 2{,}55 + 0{,}0038\,N_l',$$

где R_l^0 — радиус части постоянной плотности для внутренних (по отношению к рассматриваемому l-слою) слоев с $l' < l$; $1/\alpha_l$ — эффективная толщина поверхностной части таких слоев; N_l' — число нуклонов во внутренних слоях (с $l' < l$):

$$N' = 4\pi \int_0^\infty \rho_{l'<l}(r)\, r^2\, dr.$$

Однако не все нуклоны при $r > R_l^0$ могут иметь орбитальные моменты l. Согласно (16), лишь нуклоны, находящиеся на расстояниях $r > r_{1l} > R_l^0$ от центра ядра, могут иметь моменты l. Для того чтобы все нуклоны из l-слоя могли иметь правильные орбитальные моменты, можно несколько видоизменить вид $\rho(r)$ (без изменения приведенных ранее результатов о поведении $\rho(r)$ на границе ядер), несколько увеличив $\rho(r)$ в l-слое и оборвав при $r = r_{1l}$ (см. рис. 2*б*). При этом, однако, соотношение между R_l^0 и α_l не должно измениться, а также должна сохраняться нормировка. Результат такого видоизменения $\rho(r)$ показан на рис. 2*б*. Общий вид ρ, если еще к тому же скруглить острые углы на рис. 2*б*, по виду напоминает плотность распределения электронов для сложных атомов, полученную по методу Хартри — Фока. В таком слоистом распределении нуклонов самым внутренним слоем будет $1s$-слой, затем будет следовать $2p$-слой, $3d + 2s$-слой и т. д. Отдельные состояния, например, $1s$- или $2p$-состояния, как видно на рис. 2, напоминают соответствующие атомные состояния. Нейтронные и протонные слои пространственно могут и не совпадать, особенно у тяжелых ядер.

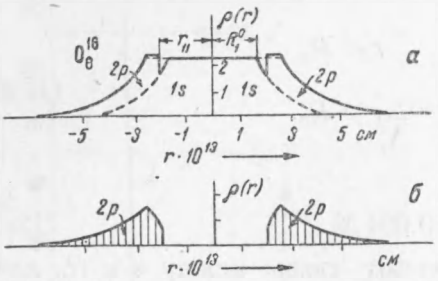


Рис. 2. Пространственное распределение протонов (нейтронов) по слоям

Таким образом, при помощи статистической модели можно дать построение наглядной модели ядра, основанной на оболочечных представлениях. Такая статистическая модель по своему существу может быть справедлива лишь по отношению к ядрам с заполненными оболочками. Хотя выше мы полагали, что ядра обладают сферической симметрией, последнее предположение не является обязательным. В частности, можно ожидать, что учет асимметрии ядер представляет собой лучшее приближение.

Автор глубоко благодарен проф. Д. Д. Иваненко за руководство и интерес к работе, Б. К. Керимову за ряд ценных замечаний и С. И. Ларину за обсуждение результатов.

ПРИМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

После того, как настоящая заметка была направлена в печать, нам стали известны работы [11], результаты которых для плотностей вида (10) совпадают с нашими. Мы хотим отметить, что плотности вида (10а) (не рассматривавшиеся в [11]), находятся в лучшем соответствии с совокупностью экспериментальных данных. Если, в частности, в дополнение к (10а) и (12а) считать, что $R_0 = 0{,}75\ (1 - 0{,}00025A) \times \times 10^{-13} A^{1/3}$ см, то такие протонные плотности дают весьма хорошие значения кулоновских и средних квадратичных радиусов.

Поступило
27 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Иваненко, В. Родичев, ДАН, **70**, 605 (1950). [2] Д. Иваненко, А. Соколов, ДАН, **74**, 33 (1950). [3] M. Born, L. Jang, Nature, **166**, 399 (1950); L. Jang, Proc. Phys. Soc., **64A**, 632 (1951). [4] J. Jensen, J. Luttinger, Phys. Rev., **86**, 907 (1952). [5] M. Mayer, Phys. Rev., **78**, 16 (1950). Реферативн. сборн., Ядерные оболочки, ИЛ, 1953. [6] Гейзенберг, Теория атомного ядра, ИЛ, 1953. [7] П. Гомбаш, Статистическая теория атома, М., 1951. [8] E. Fermi, Zs. f. Phys., **48**, 75 (1928). [9] Б. К. Керимов, Диссертация, МГУ, 1950. [10] R. Wilson, Phys. Rev., **88**, 350 (1952). [11] A. Mathur, K. Gatha, Proc. Phys. Soc., **66 A**, 1075 (1953); S. Bill, E. Burhop, Proc. Phys. Soc., **68 A**, 165 (1955).