Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. В. МЕДВЕДЕВ

К ПОСТРОЕНИЮ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 30 XII 1954)

В последнее время рассматривалась [1-3] квантовая теория поля с нелокальным взаимодействием, в которой обычный лагранжиан взаимодействия

$$L(x) = \bar{\psi}(x)\, u(x)\, \psi(x) \tag{1}$$

(мы выписываем в качестве примера лагранжиан для взаимодействующих спинорного и скалярного полей) заменяется на

$$\Lambda(\xi) = F(x',\ x'',\ x''')\, \bar{\psi}(x')\, u(x'')\, \psi(x'''), \tag{2}$$

где F — форм-фактор; ξ означает тройку точек x', x'', x''' (в дальнейшем будем писать $d\xi$ вместо $dx'dx''dx'''$). Подробное рассмотрение такой теории в хайзенберговском представлении показало, что возникает существенная трудность, связанная с вопросом об унитарности матрицы рассеяния [4-6]. Этот вопрос не решен еще до конца, но во всяком случае выяснено, что некоторые лагранжианы типа (2) приводят к неунитарной S-матрице.

Мы применим к нелокальной теории, разработанный Н. Н. Боголюбовым [7, 8] в развитие идей Штюкельберга [9], метод прямого построения матрицы рассеяния, исходя из условий: (А) — соответствия с классической теорией, (Б) — релятивистской инвариантности, (В) — унитарности $S(g)\overset{+}{S}(g) = 1$ и (Г) — причинности:

$$\frac{\delta}{\delta g(x)}\left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}\overset{+}{S}(g)\right) = 0 \quad \text{для} \quad x \gtrless y \tag{3}$$

(значок $\gtrless$ означает «позже или пространственно подобно»).

В нелокальной теории можно переписать основное разложение в виде

$$S(g) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int S_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, g(\xi_1) \ldots g(\xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n. \tag{4}$$

Условия (А) — (В) обобщаются непосредственно. Условие (3) непосредственно обобщить нельзя. Поэтому введем предварительно интегральное условие причинности.

Две 4-области G_1 и G_2 могут быть расположены по отношению к упорядочению во времени четырьмя способами: а) сигналы могут распространяться из G_2 в G_1, но не наоборот; мы будем говорить, что G_1 расположена позже G_2, $G_1 > G_2$; б) сигналы могут распространяться из G_1 в G_2, но не наоборот: G_2 позже G_1, $G_2 > G_1$;

в) сигналы не могут распространяться ни из G_1 в G_2, ни наоборот: G_1 и G_2 пространственно подобны, $G_1 \sim G_2$ (при осуществлении хотя бы одной из этих возможностей будем говорить, что G_1 и G_2 распутаны); г) сигналы могут распространяться и из G_1 в G_2 и наоборот: G_1 и G_2 запутаны, $G_1 \gtrless G_2$.

Введем классы функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ таких, что:

$$g_1(x) \neq 0, \text{ только если } x \in G_1; \quad g_2(x) \neq 0, \text{ только если } x \in G_2, \tag{5}$$

и потребуем, чтобы (интегральное условие причинности):

$$S(g_1 + g_2) = S(g_1)\, S(g_2), \quad \text{если } G_1 \succcurlyeq G_2. \tag{6}$$

Можно показать, что (6) выражает как раз составляющее содержание физического принципа причинности требование о невлиянии будущего на прошлое.

В локальной теории можно показать, что (6) и (3) эквивалентны; исходя из (6), легко показать совместность требований (А) — (Г) и естественно придти к общему выражению для $S(g)$ ([8]).

В нелокальной теории строгим требованиям причинности удовлетворить нельзя: наличие форм-фактора будет приводить хотя бы в малом к распространению взаимодействий со сверхсветовой скоростью ([10], [11]). Физически это не недопустимо, поскольку ([12]) при ограничении таких явлений областями порядка «элементарных длин» они будут в разумной теории ненаблюдаемыми. Поэтому, обобщая (6), сформулируем ослабленное условие, которое обеспечило бы, чтобы к нарушениям формальной причинности из-за форм-фактора не добавлялись новые из-за неудачного построения матрицы рассеяния.

Введем для этого классы функций $g_1(\xi)$ и $g_2(\xi)$ таких, что

$$\begin{aligned} &g_1(\xi) \neq 0, \text{ только если одновременно } x' \in G_1,\ x'' \in G_1,\ x''' \in G_1; \\ &g_2(\xi) \neq 0, \text{ только если одновременно } x' \in G_2,\ x'' \in G_2,\ x''' \in G_2, \end{aligned} \tag{7}$$

и будем считать, что $G_1 \succcurlyeq G_2$. Тогда принцип причинности будет требовать, чтобы, несмотря на наличие форм-фактора, взаимодействие $g_2(\xi)\,\Lambda(\xi)$ влияло бы на систему так, как будто взаимодействия $g_1(\xi)\,\Lambda(\xi)$ не было вовсе, следовательно, переводило бы ее из начального состояния Φ_0 в состояние $\Phi_{g_2} = S(g_2)\,\Phi_0$, а действие взаимодействия $g_1(\xi)\,\Lambda(\xi)$ не зависело бы от конкретного характера взаимодействия $g_2(\xi)\,\Lambda(\xi)$, а только от возникшего под действием последнего состояния Φ_{g_2}, т. е. переводило бы его в $\Phi_{g_1 g_2} = S(g_1)\,\Phi_{g_2}$. Действительно, формально «акаузальные» взаимодействия могут связывать только тройки точек x', x'', x''', относящиеся к одной ξ, а возможность попадания таких точек в аргументы разных функций $g_1(\xi)$ и $g_2(\xi)$ исключена допущениями (7) и $G_1 \succcurlyeq G_2$. Так как, с другой стороны, суммарное действие на систему взаимодействий, локализованных в G_1 и G_2, должно переводить ее в состояние $\Phi_{g_1+g_2} = S(g_1 + g_2)\,\Phi_0$, то мы приходим к условию:

$$S(g_1 + g_2) = S(g_1)\, S(g_2), \quad \text{если } G_1 \succcurlyeq G_2, \tag{8}$$

которое будем называть условием (Г′) почти причинности.

Переводя (8) на язык фигурирующих в (4) операторных функций S_n, получаем, что должно быть:

$$S_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = S_l(\xi_{\lambda_1}, \ldots, \xi_{\lambda_l})\, S_{n-l}(\xi_{\lambda_{l+1}}, \ldots, \xi_{\lambda_n}), \tag{9}$$

если совокупность точек $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ можно разбить на две совокупности

$$\{\xi_{\lambda_1}, \ldots, \xi_{\lambda_l}\} \succcurlyeq \{\xi_{\lambda_{l+1}}, \ldots, \xi_{\lambda_n}\}. \tag{10}$$

(Мы будем говорить: произвести сечение, разбивающее $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ в сумму совокупностей $\{\xi_{\lambda_1}, \ldots, \xi_{\lambda_l}\}$ и $\{\xi_{\lambda_{l+1}}, \ldots, \xi_{\lambda_n}\}$.)

В частности, из (9) следует, что операторные функции от двух пространственно подобных совокупностей точек коммутируют, что выражает совместность условий почти причинности и релятивистской ковариантности. Из последнего обстоятельства следует также и совместность условий почти причинности, если совокупность $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ допускает несколько сечений,— можно показать, что тогда мы получаем формально различные представления типа (9), но отличающиеся лишь перестановками операторных функций S_k, $S_{k'}$ от пространственно подобных совокупностей аргументов.

Если в совокупности точек $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ нельзя произвести ни одного сечения, будем говорить, что эти точки полностью запутаны или что совокупность нерасщепима. В противном случае будем говорить, что совокупность расщепима.

Условие почти причинности (9) в существенном однозначно определяет S_n от расщепимых совокупностей аргументов через функции S_k меньших номеров. Возникает вопрос, не будет ли (9) противоречить условию унитарности. Можно доказать, что если условие унитарности выполняется для всех S_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, для любых значений аргументов, то оно будет выполняться и для S_n для расщепимых совокупностей аргументов. Следовательно, условия (А) — (Г′) совместны.

Если мы будем теперь последовательно строить операторные функции S_n от меньших номеров к большим, то при переходе от $(n-1)$ к n значения S_n от расщепимых совокупностей определятся из (9) по уже построенным S_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, а при определении S_n для нерасщепимой совокупности аргументов надо будет удовлетворить только требованиям (Б) и (В), что всегда возможно. Следовательно, доказана теорема существования последовательности $S_1, \ldots, S_n, \ldots$ операторных функций, удовлетворяющих всем условиям (А) — (Г′), т. е. теорема существования матрицы рассеяния*.

Если совокупность $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ можно разбить в сумму попарно распутанных нерасщепимых совокупностей:

$$\Xi_1^{\nu_1} = \{\xi_{\lambda_1}, \ldots, \xi_{\lambda_{\nu_1}}\}, \ldots, \Xi_m^{\nu_m} = \{\xi_{\lambda_{\nu_1+\ldots+\nu_{m-1}+1}}, \ldots, \xi_{\lambda_n}\}, \qquad (11)$$

будем говорить, что она полностью расщепима. Можно показать, что каждая расщепимая совокупность полностью расщепима и притом однозначно. Между нерасщепимыми совокупностями (11) можно установить временное упорядочение в виде цепочки соотношений

$$\Xi_{\lambda_1}^{\nu_{\lambda_1}} \succcurlyeq \Xi_{\lambda_2}^{\nu_{\lambda_2}} \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq \Xi_{\lambda_m}^{\nu_{\lambda_m}} \qquad (12)$$

(запись (12) означает, что соотношение $\succcurlyeq$ выполняется для любой пары Ξ_i, Ξ_j, взятых из (12) с сохранением относительного порядка; оговорка существенна, поскольку соотношение $\succcurlyeq$ не транзитивно). Упорядочение (12) неоднозначно, но различные упорядочения могут отличаться лишь перестановками пространственно подобных Ξ.

Следовательно, последовательным применением (9) при учете симметрии $S_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ во всех аргументах можно всегда представить S_n в виде

$$S_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = T\{S_{\nu_1}(\Xi_1^{\nu_1}) \cdot S_{\nu_2}(\Xi_2^{\nu_2}) \cdot \ldots \cdot S_{\nu_m}(\Xi_m^{\nu_m})\}, \qquad (13)$$

где знак T-произведения означает лишь очевидное временное упорядочение различных нерасщепимых групп Ξ, $1 \leqslant m \leqslant n$ и $\Sigma\nu_i = n$.

* Доказательство носит, конечно, формальный характер, поскольку мы не рассматриваем вопросов сходимости.

Совокупность Ξ^ν ν полностью запутанных «точек» $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ можно рассматривать как одну «сложную точку», которая с нелокальной точки зрения ничем не хуже «сложных точек» ξ. Будем называть операторные выражения $\tilde{N}_\nu(\xi_1, \ldots, \xi_\nu)$ почти локальными операторами, если они отличны от нуля только когда $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ образуют сложную точку Ξ^ν. Значения $S_\nu(\Xi^\nu)$ можно рассматривать как почти локальные операторы

$$\tilde{N}_\nu(\xi_1, \ldots, \xi_\nu) = \tilde{N}_\nu(\Xi^\nu) = \tilde{M}_\nu(\Xi^\nu) + i\tilde{\Lambda}_\nu(\Xi^\nu) \tag{14}$$

($\tilde{M}_\nu$ и $\tilde{\Lambda}_\nu$ эрмитовы); $\tilde{M}_\nu$ определяется условием унитарности, $\tilde{\Lambda}_1(\xi) = \Lambda(\xi)$ в силу (А), остальные $\tilde{\Lambda}_\nu(\Xi^\nu)$ остаются произвольными. Следовательно, для однозначного определения матрицы рассеяния надо задать последовательность эрмитовых релятивистски ковариантных почти локальных операторов:

$$\tilde{\Lambda}_1(\xi) = \Lambda(\xi), \tilde{\Lambda}_2(\Xi^2), \ldots, \tilde{\Lambda}_n(\Xi^n), \ldots \tag{15}$$

Недостатком представления (13) — (15) является разрывность аналитического вида, меняющегося при изменении «степени запутанности» аргументов $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Для его исправления надо обобщить определение T-произведения функций от распутанных точек $\Xi_1, \ldots, \Xi_k$ на случай их запутывания. Такое обобщение по существу произвольно; можно произвести его, например, по теореме Вика. Тогда операторы $\tilde{M}_n$, $\tilde{\Lambda}_n$ в (13) заменятся на другие почти локальные операторы M_n, Λ_n, и правую часть (13) нужно будет просуммировать по всем возможным разбиениям $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в сумму «точек» (11). Окончательное выражение для $S(g)$ можно свернуть в краткую формулу

$$S(g) = T\{\exp[i\int \Lambda(\xi; g)\, g(\xi)\, d\xi + \int M(\xi; g)\, g(\xi)\, d\xi]\}, \tag{16}$$

где

$$M(\xi; g) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \int M_\nu(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{\nu-1})\, g(\xi_1) \ldots g(\xi_{\nu-1})\, d\xi_1 \ldots d\xi_{\nu-1} \tag{17}$$

определяется из требования унитарности, а

$$\Lambda(\xi; g) = \Lambda(\xi) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \int \Lambda_\nu(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{\nu-1})\, g(\xi_1) \ldots g(\xi_{\nu-1})\, d\xi_1 \ldots d\xi_{\nu-1}, \tag{18}$$

причем $\Lambda(\xi; 1)$ можно рассматривать как полный лагранжиан системы. Формулы (16)—(18) полностью аналогичны формулам локальной теории ([8]).

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность Н. Н. Боголюбову за ряд ценных советов, Д. В. Ширкову за плодотворную дискуссию и В. Л. Бонч-Бруевичу за обсуждение результатов работы.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
30 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Kristensen, C. Møller, Dan. Mat. Fys. Medd., **27**, No. 7 (1952). [2] C. Bloch, ibid., No. 8 (1952). [3] W. Pauli, Nuovo Cimento, **10**, 648 (1953). [4] C. Hayashi, Progr. Theor. Phys., **10**, 533 (1953). [5] Б. В. Медведев, ДАН, **100**, № 3, 433 (1955). [6] C. Hayashi, Progr. Theor. Phys., **11**, 226 (1954). [7] Н. Н. Боголюбов, ДАН, **81**, 757, 1015 (1951); **82**, № 1 (1952). [8] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Усп. физ. наук, **55**, 149 (1955). [9] E. Stueckelberg, Phys. Rev., **81**, 130 (1951); E. Stueckelberg, D. River, Helv. Phys. Acta, **22**, 215 (1949); E. Stueckelberg, A. Petermann, Helv. Phys. Acta, **24**, № 4, 317 (1951); **26**, 499 (1953). [10] A. Pais, G. Uhlenbeck, Phys. Rev., **79**, 145 (1950). [11] M. Chrétien, R. E. Peierls, Nuovo Cimento, **10**, 668 (1953). [12] Д. И. Блохинцев, ЖЭТФ, **16**, 480 (1946).