Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

М. Л. ЛИДОВ

КОНЕЧНЫЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ АДИАБАТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 21 IV 1955)

Уравнения одномерного адиабатического движения совершенного газа с учетом сил гравитации (для сферического случая симметрии) или без учета сил тяготения для движений с плоскими и цилиндрическими волнами имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+\delta_{af}\frac{fm}{r^2}=0;\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial r}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\nu-1}{r}u\right)=0;$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right)+u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right)=0;\quad \frac{\partial m}{\partial r}=[2(\nu-1)\pi+\delta_{\nu 1}]\rho r^{\nu-1}, \tag{1}$$

где u — скорость; ρ — плотность; P — давление; m — масса, отсчитываемая от центра симметрии; f — гравитационная постоянная; γ — показатель адиабаты; $\nu=1, 2, 3$, соответственно, для плоских, цилиндрических и сферических волн; $\delta_{\nu 1}=0$ при $\nu\neq 1$; $\delta_{\nu 1}=1$ при $\nu=1$; $\delta_{af}=1$ в случае движения со сферической симметрией с учетом сил гравитации и $\delta_{af}=0$ в остальных типах задач.

Рассматриваемое движение будет автомодельным, если все характеристики движения, кроме переменных параметров r и t, зависят лишь от двух постоянных размерных параметров a, b с независимой размерностью ([1]). Пусть $[a]=ML^kT^s$ и $[b]=L^mT^n$. При учете сил гравитации коэффициент f должен иметь размерность, зависимую от размерностей a и b. Очевидно, можно считать, что $a=1/f$.

Для автомодельных движений скорость, плотность, давление и массу можно в общем случае представить в виде ([1])

$$u=b^{\frac{1}{m}}t^{-\frac{n}{m}-1}V_1(\lambda),\quad \rho=ab^{-\frac{k+3}{m}}t^{\frac{n}{m}(k+3)-s}R_1(\lambda),$$
$$P=ab^{-\frac{k+1}{m}}t^{\frac{n}{m}(k+1)-(s+2)}P_1(\lambda),\quad m=ab^{-\frac{k+3-\nu}{m}}t^{\frac{n}{m}(k+3-\nu)-s}M_1(\lambda), \tag{2}$$

где $\lambda=br^{-m}t^{-n}$ — безразмерный аргумент; $V_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$, $P_1(\lambda)$ и $M_1(\lambda)$ — безразмерные функции, связанные с функциями $V(\lambda)$, $R(\lambda)$ и $P(\lambda)$, введенными Л. И. Седовым ([1]), формулами $V_1(\lambda)=\lambda^{-\frac{1}{m}}V(\lambda)$, $R_1(\lambda)=\lambda^{\frac{k+3}{m}}R(\lambda)$, $P_1(\lambda)=\lambda^{\frac{k+1}{m}}P(\lambda)$.

После подстановки выражений (2) в систему (1) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dV_1}{d\lambda}\lambda(n+m\lambda^{\frac{1}{m}}V_1)+\frac{n+m}{m}V_1+\frac{m\lambda^{\frac{1+m}{m}}}{R_1}\frac{dP_1}{d\lambda}-\delta_{af}\lambda^{\frac{2}{m}}M_1(\lambda)=0,$$
$$\frac{dP_1}{d\lambda}\lambda(n+m\lambda^{\frac{1}{m}}V_1)+m\lambda^{\frac{1+m}{m}}R_1\frac{dV_1}{d\lambda}=R_1\left\{\left[\frac{n}{m}(k+3)-s\right]+\lambda^{\frac{1}{m}}(\nu-1)V_1\right\}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{P_1}{R_1^{\gamma}}\right)=\frac{\frac{n}{m}\left[k(1-\gamma)+1-3\gamma\right]-s(1-\gamma)-2}{n+m\lambda^{\frac{1}{m}}V_1}\lambda^{-1}\frac{P_1}{R_1^{\gamma}},$$

$$\frac{dM_1}{d\lambda}=-\frac{\left[2(\nu-1)\pi+\delta_{\nu 1}\right]}{m}\lambda^{-\frac{m+\nu}{m}}R_1.$$

Ниже мы укажем первый интеграл системы (3), существующий независимо от краевых и начальных условий. При этом мы используем метод анализа размерности, предложенный и успешно примененный Л. И. Седовым для нахождения интеграла системы уравнений в задаче о сильном взрыве ([1]).

Рассмотрим интеграл $I=\int\limits_{m'(t)}^{m''(t)}\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right)^z dm$, где $m'(t)$ и $m''(t)$ — значения массы, соответствующие двум произвольным постоянным значениям параметра λ, равным λ' и λ'', соответственно, а z — некоторая постоянная. Из определения I имеем $[I]=M^{(1-\gamma)z+1}L^{(3\gamma-1)z+\nu-3}T^{-2z}$. Для автомодельных движений величина I может быть представлена ([1]) через определяющие параметры в виде $I=a^x b^y t^{\mu}K(\lambda',\lambda'')$, где $K(\lambda',\lambda'')$ — неизвестная функция; $x=1+z(1-\gamma)$; $my=(3\gamma-1)z+\nu-3-kx$; $\mu=-2z-sx-ny$.

Если $\begin{vmatrix} s & n & 2 \\ k & m & 1-3\gamma \\ 1 & 0 & \gamma-1 \end{vmatrix}\neq 0$, то можно постоянную $z=z^*$ выбрать так, чтобы $\mu=0$ (это неравенство на практике всегда можно считать выполненным). Очевидно, что для z^* верна формула:

$$z^*=\frac{n(k+3-\nu)-sm}{m\left[2+s(1-\gamma)\right]+n\left[3\gamma-1-k(1-\gamma)\right]}. \tag{4}$$

Так как согласно условию адиабатичности, P/ρ^{γ} зависит только от m, то, дифференцируя I при $z=z^*$, получим:

$$\left[\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right]_{m=m''}^{z^*}\frac{dm''}{dt}-\left[\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right]_{m=m'}^{z^*}\frac{dm'}{dt}=0. \tag{5}$$

Из этого соотношения, используя (2), непосредственно получаем искомый интеграл в виде

$$\left[\frac{P_1(\lambda)}{R_1^{\gamma}(\lambda)}\right]^{z^*}M_1(\lambda)=c_1, \tag{6}$$

где c_1 — произвольная постоянная.

В общем случае для системы уравнений (3) ранее уже был установлен интеграл масс ([1], стр. 311, гл. V), который в наших обозначениях имеет вид

$$M_1(\lambda)+\frac{2(\nu-1)\pi+\delta_{\nu 1}}{n(k+3-\nu)-sm}R_1(\lambda)\left(n+\lambda^{\frac{1}{m}}V_1(\lambda)\right)\lambda^{-\frac{\nu}{m}}=c_2. \tag{7}$$

Если из (6) и (7) исключить массу, получим:

$$c_2\left[\frac{P_1(\lambda)}{R_1^{\gamma}(\lambda)}\right]^{-z^*}+\frac{2(\nu-1)\pi+\delta_{\nu 1}}{n(k+3-\nu)-sm}R_1(\lambda)\left(n+\lambda^{\frac{1}{m}}V_1(\lambda)\right)\lambda^{-\frac{\nu}{m}}=c_2. \tag{8}$$

Это соотношение является новым интегралом системы (3), оно верно для любых указанных выше автомодельных движений. В частном случае, когда автомодельное движение определяется параметрами P_0 (давление) и ρ_0 (плотность), интеграл (7) совпадает с соотношением $P=R^{\gamma}\lambda/\gamma\beta^{\gamma-1}$, которое указано в книге ([1]) на стр. 177.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, 3-е изд., 1954.