Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. А. ДОМБРОВСКИЙ

К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОГО УСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ*

(Представлено академиком Л. И. Седовым 22 III 1955)

1. При плоском установившемся потенциальном движении газа с дозвуковыми скоростями имеют место следующие уравнения для потенциала скорости φ и функции тока ψ ([1], [2]):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\sqrt{K}\frac{\partial\psi}{\partial s},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\sqrt{K}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}, \tag{1}$$

причем

$$-\sqrt{K}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{1}{\rho v},\quad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho v}\right)=-\sqrt{K}\frac{1}{v}. \tag{2}$$

Здесь v — модуль скорости; ϑ — угол наклона вектора скорости; s — независимая переменная вместо модуля скорости; ρ — плотность; K — функция Чаплыгина ([3]). Вид функции Чаплыгина определяется исходной связью $p=p(\rho)$ между давлением p и плотностью ρ.

Аналогично для сверхзвуковых режимов движния

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\sqrt{K_1}\frac{\partial\psi}{\partial t},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=\sqrt{K_1}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}, \tag{3}$$

$$-\sqrt{K_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{1}{\rho v},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho v}\right)=\sqrt{K_1}\frac{1}{v}, \tag{4}$$

где

$$K_1=-K,\quad ds=i\,dt. \tag{5}$$

Переход к физической плоскости течения газа Z осуществляется после определения φ и ψ при помощи соотношения

$$dZ=\left(d\varphi+\frac{i}{\rho}d\psi\right)\frac{e^{i\vartheta}}{v}. \tag{6}$$

Различные случаи интегрирования уравнений движения, когда принятая связь $p=p(\rho)$ как-либо аппроксимирует адиабату, рассмотрены в работах ([2-9]). Здесь будут даны новые общие решения уравнений (1) и (3), обеспечивающие весьма хорошие приближения к адиабатическому течению газа при $M<1$ и $M>1$. Движение газа с переходом через скорость звука в настоящей заметке не рассматривается.

* Работа докладывалась на Всесоюзном совещании по гидроаэродинамике 10 XII 1952 г.

2. Дозвуковое движение газа. Вводим функцию Чаплыгина

$$K = (n \operatorname{th} ms_1)^4 \quad (s_1 = s - s_0), \tag{7}$$

где n, m и s_0 — произвольные постоянные.

Общие решения уравнений (1) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi &= n \operatorname{Re}\left(-mF + \operatorname{th} ms_1 \frac{dF}{d\zeta}\right), \\ \psi &= \frac{1}{n} \operatorname{Im}\left(-mF + \operatorname{cth} ms_1 \frac{dF}{d\zeta}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

где F — произвольная аналитическая функция комплексной переменной $\zeta = s - i\vartheta$, определяемая из граничных условий и требуемых особенностей.

Интегрируя уравнения (2), находим:

$$\rho = \frac{Ae^{2s_1}(m \operatorname{th} ms_1 - 1) + (m \operatorname{th} ms_1 + 1)}{n^2 \operatorname{th} ms_1 [Ae^{2s_1}(\operatorname{th} ms_1 - m) + (\operatorname{th} ms_1 + m)]}, \tag{9}$$

$$v = \frac{Bn^2 e^{s_1} \operatorname{th} ms_1}{Ae^{2s_1}(m \operatorname{th} ms_1 - 1) + (m \operatorname{th} ms_1 + 1)}, \tag{10}$$

где A и B — постоянные интегрирования.

Свободу выбора произвольных постоянных n, m, A и B можно с успехом использовать для различных аппроксимаций адиабатического течения газа. Легко убедиться, например, что для дозвуковых режимов движения в заданной точке $\rho = \rho^*$ получается в общем случае третий порядок касания адиабаты и кривой $p = p(\rho)$, которой соответствует введенная функция Чаплыгина (7); кроме того при $\rho = \rho^*$ будет выполняться также равенство $v^* = v^*_{\text{ад}}$, где $v_{\text{ад}}$ — скорость адиабатического течения.

Для перехода к плоскости Z на основании (6), (8), (9) и (10) имеем формулу

$$c_0 Z = \sigma_1 \frac{V_0}{e^{\zeta}} \frac{dF}{d\zeta} + \sigma_2 \overline{\frac{e^{\zeta}}{V_0} \frac{dF}{d\zeta}} + \int \frac{V_0}{e^{\zeta}} \frac{dF}{d\zeta} d\zeta + A \overline{\int \frac{e^{\zeta}}{V_0} \frac{dF}{d\zeta} d\zeta}, \tag{11}$$

где для сокращения записи введены функции

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{Be^{s_1}}{2(1-m^2)} \left(n^2 \operatorname{th} ms_1 + \frac{\operatorname{cth} ms_1}{\rho}\right) \frac{1}{v}, \\ \sigma_2 &= \frac{Be^{-s_1}}{2(1-m^2)} \left(n^2 \operatorname{th} ms_1 - \frac{\operatorname{cth} ms_1}{\rho}\right) \frac{1}{v} \end{aligned} \tag{12}$$

и постоянные

$$c_0 = \frac{nB}{1-m^2}, \quad V_0 = e^{s_0}. \tag{13}$$

Общие решения (8) были приложены к решению задач о газовых струях ([10], [13]). Получено, что для задач, точное решение которых возможно методом С. А. Чаплыгина ([3]), следует взять

$$F = -\frac{n}{m}\left(w - \zeta^{m \operatorname{th} ms_1^*} \int_0^{\zeta} \zeta^{-m \operatorname{th} ms_1^*} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta\right), \tag{14}$$

где $\zeta = e^{\vartheta}$ и w — комплексный потенциал соответствующей задачи в случае несжимаемой жидкости, где проведена формальная замена комплексной скорости на ζ и постоянного значения скорости на поверхности струи на $V^* = e^{s^*}$ (s^* — постоянное значение s на поверхности струи газа). Общие решения (8) были использованы также при решении задачи об истечении газа из симметричного сосуда бесконечной длины и конечной ширины с прямолинейными стенками; точный метод С. А. Чаплыгина к решению этой задачи не применим.

3. Сверхзвуковое движение газа. Положим

$$K_1 = (n \operatorname{tg} mt)^4, \tag{15}$$

где n и m — произвольные постоянные.

Если ввести характеристические переменные

$$\xi = {}^1\!/_2 (t - \vartheta), \quad \eta = {}^1\!/_2 (t + \vartheta), \tag{16}$$

то общие решения уравнений (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= n\left[-m(f_1 + f_2) + \frac{\operatorname{tg} mt}{2}\left(\frac{df_1}{d\xi} + \frac{df_2}{d\eta}\right)\right], \\ \psi &= \frac{1}{n}\left[-m(f_1 - f_2) - \frac{\operatorname{ctg} mt}{2}\left(\frac{df_1}{d\xi} - \frac{df_2}{d\eta}\right)\right], \end{aligned} \tag{17}$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ — произвольные функции.

После интегрирования уравнений (4) находим:

$$\rho = \frac{A(m \operatorname{tg} mt \sin t + \cos t) + (m \operatorname{tg} mt \cos t - \sin t)}{n^2 \operatorname{tg} mt\,[A(\operatorname{tg} mt \sin t + m \cos t) + (\operatorname{tg} mt \cos t - m \sin t)]}, \tag{18}$$

$$v = \frac{Bn^2 \operatorname{tg} mt}{A(m \operatorname{tg} mt \sin t + \cos t) + (m \operatorname{tg} mt \cos t - \sin t)}, \tag{19}$$

где A и B — постоянные интегрирования.

Значения произвольных постоянных n, m, A и B, как и в дозвуковом случае, устанавливаем из условия наилучшего приближения к адиабатическому течению газа, добиваясь, например, в заданной точке $\rho = \rho^*$ третьего порядка касания адиабаты и кривой $p = p(\rho)$, аппроксимирующей адиабату, а также выполнения равенства $v^* = v^*_{\text{ад}}$.

Используя (6), (17), (18) и (19), получаем следующую формулу для перехода к физической плоскости течения газа:

$$Z = \left(\varkappa \frac{df_1}{d\xi} + \bar{\varkappa} \frac{df_2}{d\eta}\right) e^{i(\eta - \xi)} + b \int e^{-2i\xi} \frac{df_1}{d\xi}\, d\xi + \bar{b} \int e^{2i\eta} \frac{df_1}{d\eta}\, d\eta, \tag{20}$$

где

$$\varkappa = \frac{1}{2}\left(n \operatorname{tg} mt - \frac{i \operatorname{ctg} mt}{n\rho}\right) \frac{1}{v}, \tag{21}$$

$$b = (1 - m^2) \frac{1 + Ai}{nB}. \tag{22}$$

Решение основных краевых задач не представляет особых затруднений. Общие решения (17) были использованы при исследовании сверхзвукового истечения газа из сопла ([11], [12]).

Если положить $m = 1$, то (20) обратится в известное преобразование Лежандра. Принимая это преобразование в качестве исходного, в работах ([8], [9]) был рассмотрен этот особый случай. На дозвуковых

режимах удовлетворительных аппроксимаций этим путем получить не удается. На сверхзвуковых режимах хорошая аппроксимация получается только при $\rho^* = 0{,}363$ ($M^* = 1{,}58$).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
25 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон, ДАН, 3, № 9 (1935). [2] Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 1950. [3] С. А. Чаплыгин, О газовых струях, 1949. [4] С. А. Христианович, И. М. Юрьев, Прикладн. матем. и мех., 11, 1 (1947). [5] С. А. Христианович, Прикладн. матем. и мех., 11, 2 (1947). [6] Th. Kármán, J. Aer. Sci., 8, № 9 (1941). [7] H. S. Tsien, J. Aer. Sci., 6, № 10 (1939). [8] J. Pérès, C. R., 219, № 20 (1944). [9] Chin Shih Kên, C. R., 225, № 17 (1947). [10] Г. А. Домбровский, Сборн. ст. под ред. Л. И. Седова, Теоретическая гидромеханика, № 9, в. 2 (1952). [11] Г. А. Домбровский, Сборн. ст. под ред. Л. И. Седова, Теоретическая гидромеханика, № 11, в. 3 (1953). [12] Г. А. Домбровский, Сборн. ст. под ред. Л. И. Седова, Теоретическая гидромеханика, № 12, в. 4 (1954). [13] Г. А. Домбровский, Автореферат диссертации, М., 1950.