Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 1

МАТЕМАТИКА

С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 16 III 1955)

Аналитичность по пространственным координатам достаточно гладких решений параболических систем с коэффициентами, зависящими от времени t, была установлена И. Г. Петровским в его фундаментальном исследовании по задаче Коши (1).

При помощи изучения фундаментальных матриц решений, построенных в (3), в комплексной области можно распространить эти результаты И. Г. Петровского на линейные параболические системы

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A_0\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)U + A_1\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)U \equiv A\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)U \qquad (1)$$

(элементы матрицы $A_0\left(t,x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ являются дифференциальными операторами порядка $2b$, элементы $A_1\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — не выше $2b-1$) с аналитическими по пространственным координатам коэффициентами.

При этом в основе всех доказательств лежит принадлежность фундаментальной матрицы системы с коэффициентами, зависящими лишь от t, пространству Z_q^q; $q = \frac{2b}{2b-1}$ (2, 3) и систематическое применение к ней теории Фрагмена и Линделефа.

1. Рассмотрим параболическую систему

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A_0\left(t, y, \frac{\partial}{\partial x}\right)U. \qquad (2)$$

Пусть $G_0(t, \tau, x-\xi, y)$ — ее матрица Грина.

Лемма 1. *Если коэффициенты системы* (2) *представляют собой непрерывные и ограниченные функции* y, t, *при этом непрерывность по* t *равномерна по* $y_1, \ldots, y_n$, *и имеют непрерывные и ограниченные производные до порядка* r *по* $y_1, \ldots, y_n$ *в полосе* $\Pi\,(0 \leqslant t \leqslant T, -\infty < y_s < \infty)$, *то* $G_0(t, \tau, x-\xi, y)$ *как функция аргументов* $\frac{x_1-\xi_1}{(t-\tau)^{1/2b}}, \ldots, \frac{x_n-\xi_n}{(t-\tau)^{1/2b}}$ *принадлежит пространству* Z_q^q $(t > \tau)$.

При этом имеют место следующие оценки производных от матрицы $G_0(t, \tau, x-\xi, y)$:

$$|D_y^{m_1} D_x^{m_2} G_0(t, \tau, z-\xi, y)| \leqslant \frac{C_{m_1 m_2} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k^{(m_1 m_2)} \varepsilon_k |z_k - \xi_k|^{q/(t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}}\right\}}{(t-\tau)^{\frac{n+m_2}{2b}}} \qquad (3)$$

$\left(z_k = x_k + iv_k;\ \varepsilon_k = -1,\ \text{если}\ \left|\frac{v_k}{x_k - \xi_k}\right| \leqslant \alpha;\ \varepsilon_k = 1,\ \text{если}\ \left|\frac{v_k}{x_k - \xi_k}\right| > \alpha;\right.$

α, $C_{m_1 m_2}$, $c_k^{(m_1 m_2)}$ — *положительные постоянные, зависящие лишь от* T).

2. Фундаментальную матрицу решений системы (1) будем отыскивать в виде

$$Z(t, \tau, x, \xi) = G_0(t, \tau, x - \xi, x) + \int_\tau^t d\beta \int G_0(t, \beta, x - y, x)\, \varphi(\beta, \tau, y, \xi)\, dy. \quad (4)$$

Тогда ([3]) относительно матрицы $\varphi(t, \tau, x, \xi)$ получится интегральное уравнение

$$\varphi(t, \tau, x, \xi) + K(t, \tau, x - \xi, x) + \int_\tau^t d\beta \int K(t, \beta, x - y, x)\, \varphi(\beta, \tau, y, \xi)\, dy = 0,$$
$$K(t, \tau, x - \xi, x) = \left[\frac{\partial}{\partial t} - A\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] G_0(t, \tau, x - \xi, x). \quad (5)$$

Основной является следующая лемма:

Лемма 2. *Если*: 1) *коэффициенты системы* (1) *представляют собой аналитические функции переменной* x_1 *в некоторой комплексной по* x_1 *и действительной по всем остальным переменным окрестности* $\mathscr{S}_1$ *вещественной точки* $t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0$; $t^0 < 0$; 2) *выполнено условие леммы* 1 *с* $r \geqslant 2b + 1$; 3) *коэффициенты в элементах оператора* $A_1\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *имеют непрерывные и ограниченные производные по* $x_1, \ldots, x_n$ *до порядка* $r_1 \geqslant 1$ *в полосе* II, *то в этой полосе существует фундаментальная матрица* $Z(t, \tau, x, \xi)$, *которая может быть продолжена в комплексную по* x_1 *область* $\mathscr{S}_2 \subset \mathscr{S}_1$ *так, чтобы она там была аналитической.*

При этом для матрицы $Z(t, \tau, x, \xi)$ *будут справедливы оценки:*

$$|Z(t, \tau, x, \xi)| \leqslant \frac{C_0 \exp\left\{-c_0 (|x_1^* - \xi_1|^q + |x_2 - \xi_2|^q + \cdots + |x_n - \xi_n|^q)/(t - \tau)^{\frac{1}{2b-1}}\right\}}{(t - \tau)^{\frac{n}{2b}}}, \quad (6)$$

если

$$x_1 = x_1^* + ix_1^{**};\quad \left|\frac{x_1^{**}}{x_1^* - \xi_1}\right| \leqslant \alpha;$$
$$|Z(t, \tau, x, \xi)| \leqslant C_0^*;\quad t - \tau \geqslant \varepsilon > 0;\quad \left|\frac{x_1^{**}}{x_1^* - \xi_1}\right| > \alpha.$$

Для установления леммы 2 изучается резольвента интегрального уравнения (5) в некоторой комплексной по x_1 окрестности точки $t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ и при помощи леммы 1 устанавливается: 1) аналитичность по x_1 всех повторных ядер; 2) равномерная сходимость ряда для резольвенты в указанной окрестности; 3) справедливость для резольвенты оценок вида (6).

3. Лемма 2 и результаты ([3]) о корректной разрешимости задачи Коши для системы (1) в классе функций

$$|U(x, t)| \leqslant Me^{k|x|^q} \quad (7)$$

позволяют, используя представление

$$U(x,t)=\int Z(t,\,t_0,\,x,\,\xi)\,U(\xi,\,t_0)\,d\xi, \tag{8}$$

доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Если коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* 1), 2), 3) *леммы* 2 ($r=2b+1$; $r_1=k_1+\ldots+k_n+1$, *где* $k_1+\ldots+k_n$ *— порядок производной, при котором они стоят*), *то любое регулярное* в* П *решение параболической системы* (1), *входящее в класс* (7), *является аналитической функцией* x_1 *при* $t>0$.

4. Для неоднородных параболических систем

$$\frac{\partial U}{\partial t}=A\left(t,\,x,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)U+f(x,\,t) \tag{9}$$

лемма 2 и методы, развитые И. Г. Петровским ([1], стр. 49—51), позволяют установить:

Теорема 2. *Если коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* 1), 2), 3) ($r=2b+1$, $r_1=k_1+\ldots+k_n+1$), *а* $f(x,t)$ *— условию* 1) *леммы* 2, *то все решения* $U(x,t)$, *удовлетворяющие неоднородной системе* (9) *в некоторой действительной окрестности* $\mathscr{G}_3$ *точки* $t^0,\ x_1^0,\ldots,x_n^0$ *и имеющие там, так же как и их первые производные по* t, *непрерывные производные по* $x_1,\ldots,x_n$ *до порядка* $2b+1$, *можно продолжить в комплексную до переменной* x_1 *область* $\mathscr{G}_4\subset\mathscr{G}_1$ *таким образом, чтобы они там были аналитическими.*

Замечание. В том случае, когда коэффициенты и правые части аналитичны по $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ в некоторой комплексной по этим переменным окрестности вещественной точки $t^0,\ x_1^0,\ldots,x_n^0$, аналитичность устанавливается по всем этим переменным, в частности, при $k=n$ отсюда получается аналитичность по совокупности всех переменных $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$.

Рассмотрим параболическую систему

$$\frac{\partial^{n_i}u_i}{\partial t^{n_i}}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k_0 2b+\sum k_s\leqslant n_j 2b}A_{ij}^{(k_0k_1\ldots k_n)}(t)\,\frac{\partial^{k_0+k_1+\cdots+k_n}u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}+f_i(x,t) \tag{10}$$

$\left(i=1,2,\ldots,N;\ k_0<n_j,\ \sum_{s=1}^{n}k_s\leqslant M\right)$ с непрерывными коэффициентами $(0\leqslant t\leqslant T)$. Обычным путем сведем ее к системе уравнений первого порядка по t, которую запишем в матричной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t}=B\left(t,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)U+f(x,\,t). \tag{10'}$$

Матрица Грина $G(t,\tau,x-\xi)$ системы (10') ($f(x,t)\equiv 0$) принадлежит как функция аргументов $\frac{x_1-\xi_1}{(t-\tau)^{1/2b}},\ \ldots,\ \frac{x_n-\xi_n}{(t-\tau)^{1/2b}}$ пространству Z_q^q. Это может быть установлено использованием методов ([1]) и леммы 2 ([5]). Для производных от матрицы $G(t,\tau,x-\xi)$ справедливы оценки

$$|D^mG(t,\tau,x-\xi)|\leqslant\frac{c_m}{(t-\tau)^{\frac{n+m+M-2b}{2b}}}\exp\left\{-c_m|x-\xi|^q/(t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}\right\}. \tag{11}$$

* Регулярным решением системы (1) называется решение, непрерывное вместе со всеми своими производными, входящими в систему.

Если использовать представление решения, данное в [4] (стр. 59, формула (7)), и исследовать входящие в правую часть формулы интегралы при помощи теоремы Фрагмена и Линделёфа, примененной к матрице $G(t, \tau, x-\xi)$, то получим

Теорема 3. *Если $f(x, t)$ аналитична по x_1 в комплексной по x_1 окрестности $\mathscr{G}_{(x^0,t^0)}$ любой точки $(x^0, t^0) \in \mathscr{G}_5 \{x \in V,\ 0 \leqslant t_1 < t < t_2 \leqslant T\}$ (V — некоторая область $\mathcal{E}^n$) и имеет в $\mathscr{G}_5$ непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $M - 2b + \Delta$ ($\Delta = 0$, если $M = 2b$; $\Delta = 1$, если $M > 2b$), то любое решение системы (10'), имеющее в области $\mathscr{G}_5$ непрерывные производные порядка M по $x_1, \ldots, x_n$ и первого порядка по t, аналитическая функция x_1 в каждой точке области $\mathscr{G}_5$.*

В частности, если $M = 2b$, из теоремы 3 получается аналитичность регулярных решений системы (10) без всяких дополнительных предположений (об асимптотике или дополнительной гладкости).

Заметим, между прочим, что оценки (11) позволяют установить теорему о корректной разрешимости задачи Коши для системы (10) в классе функций (7).

Черновицкий
государственный университет

Поступило
12 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, 8 (1938). [2] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, **8**, 6 (1953). [3] С. Д. Эйдельман, ДАН, **98**, № 6 (1954). [4] С. Д. Эйдельман, Матем. сборн., **35**, 1 (1954). [5] С. Д. Эйдельман, Матем. сборн., **33**, 2 (1953).