Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 1

МАТЕМАТИКА

И. Г. СОКОЛОВ

ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН РЯДА ФУРЬЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 III 1955)

Пусть $KW^{(r)}$ есть класс 2π-периодических функций, имеющих почти всюду производную порядка r, удовлетворяющую там, где она существует, неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant K. \tag{1}$$

А. Н. Колмогоров ([1]) показал, что

$$E_n[KW^{(r)}] \sup_{f \in KW^{(r)}} [f - S_n(f)] = K\left[\frac{4}{\pi^2}\frac{\lg n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)\right], \tag{2}$$

где $S_n(f)$ есть частная сумма ряда Фурье функции f.

При этом А. Н. Колмогоров устанавливает неравенство

$$E_n[W^{(r)}] \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos(kx + r\pi/2)}{k^r}\right| dx. \tag{3}$$

Если сделать оценку остаточного члена $O(1/n^r)$ в формуле (2) по методу Колмогорова, то можно получить лишь неравенство вида

$$O\left(\frac{1}{n^r}\right) \leqslant \frac{A_r}{n^r},$$

где A_r растет вместе с r к бесконечности.

Мы дадим уточнение формулы (2) в том смысле, что в неравенстве

$$E_n[KW^{(r)}] \leqslant K\left[\frac{4}{\pi^2}\frac{\lg(n-1)}{n^r} + \frac{A}{n^r}\right] \quad (n \geqslant 2)$$

указывается верхняя грань для константы A, не зависящая от r. При этом мы используем метод С. М. Никольского, примененный им к аналогичному вопросу ([3]). С. М. Никольский исходит из интегрального представления, полученного А. Н. Тверитиным ([2]):

$$\varphi_n(x; r; \alpha) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos(kx + \alpha)}{k^r} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^1 \rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{\cos((n+1)x + \alpha) - \rho\cos(nx + \alpha)}{(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2\frac{x}{2}}\,d\rho. \tag{4}$$

Это интегральное представление мы и используем для оценки сверху интеграла (3) в неравенстве А. Н. Колмогорова.

Лемма 1. *Для всех* $0<\rho<1$, $0<x<\pi$ *имеет место равенство*

$$\frac{\cos((n+1)x+\alpha)-\rho\cos(nx+\alpha)}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2(x/2)}=\frac{(1-\rho)\cos(nx+\alpha)-x\sin(nx+\alpha)+O(x^2)}{(1-\rho)^2+\rho x^2}, \quad (5)$$

где

$$O(x^2)<x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3!}+\frac{\pi^2}{4!}\right).$$

Доказательство.

$$\cos((n+1)x+\alpha)-\rho\cos(nx+\alpha)=$$
$$=(1-\rho)\cos(nx+\alpha)-x\sin(nx+\alpha)+O'(x^2).$$

где

$$|O'(x^2)|<x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3!}\right).$$

Далее:

$$\left|\frac{1}{(1-\rho)^2+\rho x^2}-\frac{1}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2(x/2)}\right|\leqslant\frac{\pi^2}{2\cdot 4!}\frac{x^2}{(1-\rho)^2+\rho x^2}.$$

Эта лемма является небольшим уточнением леммы С. М. Никольского ([3]).

Лемма 2. *Имеет место неравенство*:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|\varphi_n(x;r;\alpha)|\,dx\leqslant\frac{2}{\pi\Gamma(r)}\int_0^\pi dx\left|\int_0^1\rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{x\sin(nx+\alpha)}{(1-\rho)^2+\rho x^2}d\rho\right|+O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad (6)$$

где

$$\left|O\left(\frac{1}{n^r}\right)\right|<\frac{1}{n^r}\left(2+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{12}\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{\Gamma(r)\,\pi}\int_0^\pi dx\int_0^1\rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{x^2}{(\rho-1)^2+\rho x^2}d\rho\leqslant\frac{2}{\pi\Gamma(r)}\int_0^\pi dx\int_0^1\rho^{n-1}\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}d\rho=\frac{2}{n^r}. \quad (7)$$

Далее:

$$\frac{2}{\pi\Gamma(r)}\int_0^\pi dx\int_0^1\rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{1-\rho}{(\rho-1)^2+\rho x^2}d\rho\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi\Gamma(r)}\int_0^1\rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}d\rho\int_0^\infty\frac{1-\rho}{(\rho-1)^2+\rho x^2}dx=\frac{1}{(n+1/2)^r}. \quad (8)$$

Неравенство (6) получаем из (4), (5), (7), (8).

Лемма 3. *Имеют место неравенства:*

для нечетного $r>1$

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\pi/n}dx\left|\int_0^1\rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{x\cos nx}{(1-\rho)^2+\rho x^2}d\rho\right|\leqslant\left[\frac{\sqrt{2}}{6}\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2\lg 2}{\pi}\right]\frac{1}{n^r}; \quad (9)$$

для $r=1$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/n}dx\left|\int_0^1\rho^n\frac{x\cos nx}{(1-\rho)^2+\rho x^2}d\rho\right|<\frac{2}{\pi n}\left[\lg(1+\pi^2)+\pi\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\pi}\right]; \quad (10)$$

для четного $r>0$

$$\frac{2}{\pi\Gamma(r)}\int_0^{\pi/n}dx\int_0^1\rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{x\sin nx}{(1-\rho)^2+\rho x^2}d\rho<\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx\,\frac{1}{n^r}. \qquad (11)$$

Доказательство неравенств (9), (10) и (11). Имеем

$$\frac{2}{\pi\Gamma(r)}\int_0^{\pi/n}dx\int_0^1\rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{x\sin nx}{(1-\rho)^2+\rho x^2}d\rho\leqslant\frac{2}{\pi\Gamma(r)}\int_0^1\rho^{n-1}\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}d\rho\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Далее, для $r=1$ имеем:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/n}dx\left|\int_0^1\rho^n\frac{x\cos nx}{(1-\rho)^2+\rho x^2}d\rho\right|\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^1\rho^n d\rho\int_0^{\pi/n}\frac{x}{(1-\rho)^2+\rho x^2}d\rho=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1(1-t)^{n-1}\lg\left[1+\frac{(1-t)\pi^2}{n^2t^2}\right]dt<\frac{1}{\pi}\int_0^{1/n}\lg\left(1+\frac{\pi^2}{n^2t^2}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1(1-t)^{n-1}\lg(1+\pi^2)\,dt=\frac{2}{n\pi}\left[\lg(1+\pi^2)+\pi\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\pi}\right].$$

Доказательство неравенства (9). Имеем

$$\frac{2}{\pi\Gamma(r)}\int_0^{\pi}dx\int_0^1\rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{x\cos nx}{(1-\rho)^2+\rho x^2}d\rho\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3\Gamma(r)}\int_0^1\rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}d\rho\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1-\rho)^2n^2+\rho x^2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{6\Gamma(r)\,n}\int_0^1\frac{\rho^{n-1/2}}{1-\rho}\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}d\rho=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{6n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k+1/2)^r}\leqslant\frac{\sqrt{2}\pi}{6n^{r+1}}+\frac{\sqrt{2}\pi}{6(r-1)\,n^r}. \qquad (12)$$

Далее:

$$\int_{\pi/2n}^{\pi/n}dx\left|\int_0^1\rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{x\cos nx}{(1-\rho)^2+\rho x^2}d\rho\right|<\int_0^1\rho^{n-1}\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}d\rho\int_{\pi/2n}^{\pi/n}\frac{dx}{x}. \qquad (13)$$

Из формул (12), (13), мы и получаем (9).

Теорема. *Для всех* $n>1$ *имеют. место неравенства:*
для четных r

$$E_n(W^{(r)})\leqslant\frac{1}{n^r}\left[2+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{12}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx\right]+$$

$$+\frac{4}{\pi^2n^r}\left[\lg(n-1)+C+\frac{1}{2(n-1)}\right];$$

для r нечетных, $r>1$

$$E_n(W^{(r)}) \leqslant \frac{1}{n^r}\left[2+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{12}+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2\lg 2}{\pi}\right]+$$
$$+\frac{4}{\pi^2 n^r}\left[\lg(n-1)+C+\frac{1}{2(n-1)}\right];$$

для $r=1$

$$E_n(W^{(r)}) \leqslant \frac{1}{n}\left\{2+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{12}+\frac{2}{\pi}\left[\lg(1+\pi^2)+\pi\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\pi}\right]\right\}+$$
$$+\frac{4}{\pi^2 n}\left[\lg(n-1)+C+\frac{1}{2(n-1)}\right];$$

здесь C — эйлерова постоянная.

Для $n=1$ в этих неравенствах нужно в правых частях сохранить лишь первые члены.

Рассмотрим для определенности случай нечетного r, $r>1$. На основании формул (3), (4), (6), (9)

$$E_n(W^{(r)}) \leqslant \frac{1}{n^2}\left[2+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{12}+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2\lg 2}{\pi}\right]+$$
$$+\frac{2}{\pi\Gamma(r)}\int_{\pi/n}^{\pi} dx\left|\int_0^1 \rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{x\cos nx}{(1-\rho)^2+\rho x^2}d\rho\right|.$$

Далее:

$$\frac{2}{\pi\Gamma(r)}\int_{\pi/n}^{\pi} dx\left|\int_0^1 \rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{x\cos nx}{(1-\rho)^2+\rho x^2}d\rho\right| =$$

$$=\frac{2}{n\pi\Gamma(r)}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_0^{\pi/2}-\int_{\pi/2}^{\pi}\right)dx\int_0^1\rho^n\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{\frac{x+k\pi}{n}\cos x}{(1-\rho)^2+\rho\left(\frac{x+k\pi}{n}\right)^2}d\rho \leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi\Gamma(r)}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_0^{\pi/2}-\int_{\pi/2}^{\pi}\right)dx\int_0^1\rho^{n-1}\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{r-1}\frac{\cos x}{x+k\pi}dx \leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{\pi^2 n^r}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\leqslant\frac{4}{\pi^2 n^r}\left[\lg(n-1)+C+\frac{1}{2(n-1)}\right].$$

Подсчитывая числовые значения констант в наших неравенствах, видим, что в качестве верхней грани для константы A в неравенстве

$$E_n(KW^{(r)}) \leqslant K\left[\frac{4}{\pi^2}\frac{\lg(n-1)}{n^r}+\frac{A}{n^r}\right] \quad (n\geqslant 2)$$

можем взять число 5,9 для r нечетного большего единицы; 5,4 для r четного; 6,7 для $r=1$.

Львовский государственный университет
им. Ив. Франко

Поступило
12 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Ann. of Math., **36**, 521 (1935). [2] А. Н. Тверитин, ДАН, **61**, № 6, 985 (1948). [3] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, № 6 (1949).