Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 1

МАТЕМАТИКА

Л. Н. СЛОБОДЕЦКИЙ

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 26 III 1955)

Рассмотрим в слое $[0, T]$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ дифференциальное уравнение

$$u_t' - Mu \equiv u_t' - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, X)\, u''_{x_i x_j} - \sum_{j=1}^{n} b_j(t, X)\, u'_{x_j} - \\ - c(t, X)\, u = f(t, X), \quad a_{ij} = a_{ji}, \tag{A}$$

в предположении, что a_{ij}, b_j, c и f — комплексные функции вещественных переменных t и $X(=(x_1, \ldots, x_n))$. Положим

$$\lambda = \lambda(t, X, A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, X)\, \alpha_i \alpha_j.$$

Следуя И. Г. Петровскому (1), мы говорим, что уравнение (A) параболично, если при любых действительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$\operatorname{Re} \lambda \geqslant \delta \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \quad (\delta > 0).$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (A) удовлетворяют условиям 1°—4° нашей заметки (2) и дополнительному условию

5°. $a_{ij}(t, X)$ удовлетворяют по t условию Гёльдера

$$|a_{ij}(t_1, X) - a_{ij}(t_2, X)| \leqslant M |t_1 - t_2|^{\beta},$$

где M и β $(0 < \beta \leqslant 1)$ — положительные постоянные.

При условии 1°—4° уравнение

$$u_t' - Mu = 0 \tag{A_0}$$

имеет основное сингулярное решение $u(t, X; \tau, Y)$, которое как функция переменных (τ, Y) является основным сингулярным решением уравнения

$$-v_t' - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} v)''_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n} (b_j v)'_{x_j} - Cv = 0, \tag{$\bar{A}_0$}$$

сопряженного с (A_0). При более сильных ограничениях основное решение уравнения (A_0) построено Дресселем (3, 4).

Используя свойства основного решения, приведенные в заметке (2), построим для уравнения (A) теорию потенциала, вполне аналогичную таковой для уравнений эллиптического типа, предложенной Штернбергом (5). Построением теории потенциала для уравнения теплопроводности занимались Э. Э. Леви (4), Г. Мюнтц (5) и А. Н. Тихонов (6).

Пусть (Ω) — ограниченная область n-мерного пространства $x_1, \ldots, x_n$ с границей (Γ) и пусть (Γ) есть сумма конечного числа гладких непересекающихся замкнутых поверхностей.

Положим

$$Pu = \sum_{j=1}^{n} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}(s, Y)u)'_{y_i} - b_j(s, Y)\, u \Big\} \cos(\mathbf{n}, y_j),$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к (Γ). Применяя формулу Грина, получаем при $t > \tau$

$$\int_{\tau}^{t} ds \int_{(\Gamma)} \ldots \int Pu(t, X; s, Y)\, d\Gamma_y = \mu - \int_{(\Omega)} \ldots \int u(t, X; \tau, Y)\, dY -$$

$$- \int_{\tau}^{t} ds \int_{(\Omega)} \ldots \int u(t, X; s, Y)\, C(s, Y)\, dY, \qquad (1)$$

где

$$\mu = \begin{cases} 1, & X \in (\Omega); \\ 1/2, & X \in (\Gamma); \\ 0, & X \in \overline{(\Omega) + (\Gamma)}. \end{cases}$$

Формула (1) аналогична формуле Гаусса для потенциала двойного слоя уравнения Лапласа. Из нее получаем

$$\lim_{X \to X_0} \int_{\tau}^{t} ds \int_{(\Gamma)} \ldots \int Pu(t, X; s, Y)\, d\Gamma_y =$$

$$= \pm \frac{1}{2} + \int_{\tau}^{t} ds \int_{(\Gamma)} \ldots \int Pu(t, X_0; s, Y)\, d\Gamma_y, \qquad (2)$$

где $X_0 \in (\Gamma)$, верхний знак при $1/2$ относится к случаю, когда $X \to X_0$ изнутри (Ω), и нижний знак — к случаю, когда $X \to X_0$ со стороны внешности (Ω).

Используя 5°, получим при $t > s$:

$$Pu(t, X; s, Y) = \frac{1}{2} \tilde{u}_0(t, X; s, Y)\, \frac{|X - Y|}{t - s} \cos(\mathbf{n}, \widehat{X - Y}) + H(t, X; s, Y), \qquad (3)$$

где

$$\tilde{u}_0(t, X; s, Y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int \exp\Big\{ - \int_{s}^{t} \lambda(s_1, Y; A)\, ds_1 + i(A, X - Y) \Big\} dA,$$

$$|H(t, X; s, Y)| \leqslant \frac{C}{(t - s)^{\frac{n+1}{2} - \beta}} \exp\Big\{ - \eta \frac{|X - Y|^2}{t - s} \Big\}.$$

Пусть теперь (Γ) — поверхность типа Ляпунова и $\mu(s, Y)$ суммируема на $(\Gamma) \times [0, T]$. Положим

$$V(t, X) = \int_{0}^{t} ds \int_{(\Gamma)} \ldots \int Pu(t, X; s, Y)\, \mu(s, Y)\, d\Gamma_y,$$

$$W(t, X) = \int_{0}^{t} ds \int_{(\Gamma)} \ldots \int u(t, X; s, Y)\, \mu(s, Y)\, d\Gamma_y.$$

Назовем $V(t, X)$ и $W(t, X)$, соответственно, параболическими потенциалами двойного и простого слоя с плотностью $\mu(s, Y)$. Для точек (t, X), не лежащих на $(\Gamma) \times [0, T]$, они являются регулярными решениями уравнения (A_0), обращающимися в нуль при $t = 0$.

Обычным способом доказывается, что $V(t, X)$ и $W(t, X)$ обладают всеми свойствами, присущими потенциалам двойного и простого слоя уравнения Лапласа. Например, в предположении непрерывности $\mu(s, Y)$, получаем:

$$\lim_{X \to X_0} V(t, X) = \pm \frac{1}{2} \mu(t, X_0) + V(t, X_0), \tag{4}$$

$$\lim_{X \to X_0} P' W(t, X) = \mp \mu(t, X_0) + P' W(t, X_0), \tag{5}$$

где

$$P'u = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(t, X) u) - b_j(t, X) u \right\} \cos(\mathbf{n}_0, x_j)$$

и $\mathbf{n}_0$ — нормаль к (Γ) в X_0.

Равенства (4) и (5) позволяют сводить к интегральным уравнениям типа Вольтерра решения различных внешних и внутренних краевых задач (смешанных задач) для уравнения (A).

Недостаток места не позволяет нам остановиться на выяснении условий существования и единственности решений этих краевых задач. Отметим только, что для обеспечения единственности решения внешних задач надо на искомое решение $u(t, X)$ наложить следующее условие поведения на бесконечности:

$$|u(t, X)| \leqslant C_1 \exp\{C_2 |X|^2\},$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные.

Положим теперь

$$G_I(t, X; \tau, Y) = u(t, X; \tau, Y) - V_I(t, X; \tau, Y),$$

где $V_I(t, X; \tau, Y)$ — регулярное внутри $\Omega \times (\tau, T]$ решение уравнения (A_0), удовлетворяющее условиям

$$V_I(t, X; \tau, Y) - u(t, X; \tau, Y)|_{(\Gamma) \times (\tau, T]} = 0,$$

$$V_I|_{t=\tau} = 0, \quad X, Y \in (\Omega).$$

Построение $V_I(t, X; \tau, Y)$ производится при помощи потенциала двойного слоя. Функцию $G_I(t, X; \tau, Y)$ назовем функцией Грина первой краевой задачи для уравнения (A).

Отметим следующие свойства $G_I(t, X; \tau, Y)$:

1. Имеет место равенство

$$G_I(t, X; \tau, Y) = \int_{(\Omega)} \dots \int G_I(t, X; s, Z) G_I(s, z; \tau, Y) \, dZ, \tag{6}$$

$$\tau \leqslant s \leqslant t, \quad X, Y \in (\Omega).$$

2. Пусть $\tilde{G}_I(t, X; \tau, Y)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения $(\tilde{A})$, сопряженного с (A). Тогда

$$\tilde{G}_I(t, X; \tau, Y) = G_I(\tau, Y; t, X). \tag{7}$$

Таким же образом при помощи потенциала простого слоя строится функция Грина $G_{II}(t, X; \tau, Y)$ для второй краевой задачи с краевым

условием

$$PG_{II}(t, X; \tau, Y) + h(t, X) G_{II}(t, X; \tau, Y)\big|_{X \in (\Gamma)} = 0, \qquad (8)$$
$$\tau < t \leqslant T$$

где $h(t, X)$ — непрерывная функция. Для $G_{II}(t, X; \tau, Y)$ имеет место равенство (6). Равенство (7) также имеет место, если под $G_{II}(t, X; \tau, Y)$ понимается функция Грина уравнения (A) с краевым условием типа (8), но с заменой Pu на

$$\bar{P}u = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(s, Y) \frac{\partial u}{\partial y_i} \cos(\mathfrak{n}, y_j).$$

Пусть теперь коэффициенты эллиптического оператора Mu не зависят от t. Рассмотрим задачу о собственных функциях Mu, обращающихся в нуль на (Г). Решения задачи

$$Mu + \lambda u = 0, \qquad (B)$$
$$u|_{\Gamma} = 0$$

являются при любом t решениями интегрального уравнения

$$u(X, \lambda) = e^{\lambda t} \int \ldots \int_{(\Omega)} G_I(t, X; 0, Y) u(Y, \lambda) dY. \qquad (9)$$

Из (9) и оценок $G_I(t, X; \tau, Y)$ имеем:

1. При условии $\operatorname{Re}\lambda < a$, где a — некоторое действительное число, $u(X, \lambda) \equiv 0$.

2. При $\operatorname{Re}\lambda > 0$ в (Ω) имеет место неравенство

$$|u(X, \lambda)| \leqslant C (\operatorname{Re}\lambda)^{n/4} \Big[\int \ldots \int_{(\Omega)} |u(Y, \lambda)|^2 dY\Big]^{1/2}, \qquad (10)$$

где C — положительная постоянная, зависящая только от (Ω).

3. Пусть Ω' — любая внутренняя подобласть Ω и $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Тогда в Ω'

$$|D_X^l u(X, \lambda)| \leqslant C' (\operatorname{Re}\lambda)^{n/4 + l/2} \Big[\int \ldots \int_{(\Omega)} |u(Y, \lambda)|^2 dY\Big]^{1/2} \quad (l = 1, 2), \qquad (11)$$

где C' — положительная постоянная, зависящая только от Ω'.

Аналогичные результаты имеют место для собственных функций эллиптических операторов, удовлетворяющих краевому условию $Pu + h(X) u|_{\Gamma} = 0$.

Неравенства (10) и (11) являются обобщением и уточнением соответствующих результатов Х. Л. Смолицкого [9] для оператора Лапласа и О. А. Ладыженской [10] для самосопряженного эллиптического оператора.

Ленинградский государственный
педагогический институт

Поступило
18 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Бюлл. Моск. унив., сер. А, № 7 (1937). [2] Л. Н. Слободецкий, ДАН, **101**, № 5 (1955). [3] F. G. Dressel, Duke Math. J., **7**, 186 (1940). [4] F. G. Dressel, Duke Math. J., **13**, 61 (1946). [5] W. Sternberg, Math. Zs., **21**, 286 (1924). [6] Э. Э. Леви, Ann. di Mat., 12 (1908). [7] Ch. H. Müntz, Math. Zs., **38**, 323 (1934). [8] А. Н. Тихонов, Бюлл. Моск. унив., сер. А, № 9 (1938). [9] Н. М. Гюнтер, Теория потенциала, 1953, стр. 336—340. [10] О. А. Ладыженская, ДАН, **74**, № 3 (1950).