Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 1

МАТЕМАТИКА

В. А. ПЛИСС

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ ДЛЯ СИСТЕМЫ n ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 III 1955)

Н. П. Еругин доказал теорему (теорема 1.3 работы (1)), позволяющую устанавливать устойчивость в целом нулевого решения системы двух дифференциальных уравнений. При доказательстве этой теоремы Еругин существенно пользовался двумерностью фазового пространства. В настоящей статье эта теорема Еругина обобщается на случай системы с произвольным числом уравнений.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

правые части которой определены, непрерывны и удовлетворяют условию единственности решений при любых вещественных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Кроме того предположим, что $X_s(0, 0, \ldots, 0) = 0$, $s = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим гиперплоскость

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \tag{2}$$

фазового пространства. Будем говорить, что траектория $M(t)$ системы (1) пересекает гиперплоскость (2) при $t = t_1$ в точке $M(t_1)$, если существуют такие моменты времени $t_0 < t_1 \leqslant t_2 < t_3$, что на траектории $M(t)$ $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ при $t \in [t_1, t_2]$ и $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \neq 0$ при $t \in [t_0, t_1)$ и $t \in (t_2, t_3]$. При этом знаки выражения $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ на траектории $M(t)$ в промежутках $[t_0, t_1)$ и $(t_2, t_3]$ разные.

Теорема. *Для того чтобы тривиальное решение системы* (1) *было асимптотически устойчиво в целом, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *Точка* $(0, 0, \ldots, 0)$ — *единственное состояние равновесия системы* (1).

2. *Состояние равновесия* $(0, 0, \ldots, 0)$ *устойчиво в смысле Ляпунова.*

3. *Существует такая гиперплоскость* L *вида* (2), *что:* а) *вдоль любой траектории, для которой можно указать такое* T, *что при* $t > T$ *она не пересекает гиперплоскость* L, *выполняется* $x_s(t) \to 0$, $s = 1, 2, \ldots, n$, *при* $t \to \infty$; б) *существует определенная только для точек гиперплоскости* L *непрерывная функция* v, *обладающая свойствами* $v(0, 0, \ldots, 0) = 0$; $v(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ *при* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L$ *и* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$; $v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to +\infty$ *при* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L$ *и* $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to +\infty$; в) *если траектория* $M(t)$ *системы* (1) *имеет с гиперплоскостью* L *хотя бы две общих точки, то выполняется следующее: пусть* t_1 *и* t_2 *суть два момента времени,*

при которых точки $M(t_1)$ *и* $M(t_2)$ *траектории* $M(t)$ *лежат в гиперплоскости* L; *тогда* $v(M(t_1)) > v(M(t_2))$, *если* $t_1 < t_2$.

Для того чтобы доказать достаточность условий теоремы, надо воспользоваться следующими соображениями. Пусть траектория $M(t)$ системы (1) обладает тем свойством, что для нее можно выделить возрастающую последовательность моментов времени

$$t_1, t_2, \cdots \to +\infty \tag{3}$$

такую, что точки $M(t_k)$ траектории $M(t)$ являются точками пересечения последней с гиперплоскостью L. Тогда все точки $M(t_k)$ лежат, в силу условий 3б и 3в теоремы, в ограниченной области $v \leqslant v(M(t_1))$. Поэтому, согласно принципу выбора Больцано — Вейерштрасса, последовательность точек $M(t_k)$ можно считать сходящейся к точке A, т. е. $\lim\limits_{k \to +\infty} M(t_k) = A$, и, следовательно, благодаря (3), точка A есть ω-предельная точка для $M(t)$. Используя условия 2 и 3 теоремы, можно показать, что A совпадает с началом координат. Из условия 2 теоремы вытекает, что в таком случае начало координат есть единственная ω-предельная точка траектории $M(t)$. Тем самым достаточность условий теоремы окажется доказанной.

Необходимость условий теоремы доказывается простой ссылкой на результаты работы ([2]).

Сформулированный выше признак устойчивости в целом позволяет изучить поведение решений двух следующих систем трех дифференциальных уравнений (4) и (5):

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = z - ay, \quad dz/dt = -\varphi(y) - bx. \tag{4}$$

Здесь a и b — положительные постоянные, функция $\varphi(y)$ непрерывна, удовлетворяет условию единственности решений системы (4) и $\varphi(0) = 0$; $\varphi(y)/y > b/a$ при $y \neq 0$. Тривиальное решение системы (4) при этих условиях устойчиво в целом. Заметим, что это утверждение обобщает результат Е. А. Барбашина ([3])

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = z - f(x), \quad dz/dt = -by - cz. \tag{5}$$

Здесь b и c — положительные постоянные, удовлетворяющие неравенству $c^2 - 4b > 0$, а функция $f(x)$ непрерывна, удовлетворяет условию единственности решений системы (7) и $f(0) = 0$ и $xf(x) > 0$ при $x \neq 0$. Тривиальное решение системы (5) при высказанных условиях устойчиво в целом.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
17 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. П. Еругин, Прикладн. матем. и мех., 14, в. 5 (1950). [2] Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, Прикладн. матем. и мех., 18, в. 3 (1954). [3] Е. А. Барбашин, Прикладн. матем. и мех., 16, в. 5 (1952).