Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 1

*МАТЕМАТИКА*

А. Г. КОСТЮЧЕНКО

# О ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ И СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 8 III 1955)*

В заметке И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова (1) указывается новый подход к проблеме единственности решения задачи Коши для системы линейных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

В настоящей заметке этот метод применяется к установлению единственности решения задачи Коши и смешанной задачи для некоторых типов систем линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Сделаем сначала несколько общих замечаний.

1. Пусть имеется система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right) u \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{2}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ — вектор $N$-мерного пространства; $u(x) = \{u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)\}$ — вектор-функция; $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ — матрица, элементами которой являются полиномиальные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от $x$.

Допустим, что существует ненулевое пространство вектор-функций $PS^{\beta, B}_{\alpha, A}$, которые выдерживают неограниченное число раз применение оператора $\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)}$, причем выполняются оценки

$$\left| x^k \overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)} \varphi \right| \leqslant C_\varphi(\varepsilon, \delta)(A + \delta)^k k^{k\alpha} (B + \varepsilon)^n n^{n\beta}.$$

Здесь $\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)}$ — оператор, сопряженный к $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ в смысле дифференциальных уравнений. Пространство $PS^{\beta, B}_{\alpha, A}$ предполагается также достаточно полным в том смысле, что равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \varphi(x)\, dx = 0,$$

справедливое для всех $\varphi$, влечет за собой равенство $\Phi(x)\equiv 0$, если $\Phi(x)$ измерима и выполняется оценка

$$|\Phi(x)|\leqslant (M+\varepsilon)^k k^{k\alpha}|x|^k, \quad M<A.$$

Топология в пространстве $PS^{\beta,B}_{\alpha,A}$ вводится аналогично тому, как это сделано в ([2]).

На таком пространстве можно определить обобщенные функции обычным образом. Такие обобщенные функции можно $P$-дифференцировать по формуле

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)T, \varphi\right)=\left(T, \overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)}\varphi\right).$$

Сложение и умножение на число определяются обычным образом.

Лемма. *Оператор* $e^{tP\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)}$, *понимаемый как* $\sum \frac{t^n}{n!}P^n$, *в пространстве* $PS^{\beta,B}_{\alpha,A}$ *является ограниченным оператором, причем* $t$ *зависит от* $A$ *и* $B$.

Доказательство не отличается от доказательства леммы работы ([1]).

Теорема 1. *Если* $u_0(x)$ *есть обобщенная функция над* $PS^{\beta,B}_{\alpha,A}$, *то решение задачи* (1)—(2) *существует в виде обобщенной функции над пространством* $PS^{\beta,B}_{\alpha,A}$, *решение определяется по формуле*

$$(u(x,t),\varphi(x))=(u_0(x), e^{t\overline{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)}\varphi). \tag{3}$$

*Решение существует в интервале* $0\leqslant t\leqslant t_0$, *где* $t_0$ *зависит от* $u_0(x)$.

Теорема 2. *Если* $u_0(x)\in T(PS^{\beta,B}_{\alpha,A})$, *то в классе обобщенных функций над* $PS^{\beta,B}_{\alpha,A}$ *решение задачи* (1)—(2) *будет единственным.*

Доказательство теорем аналогично доказательству теорем 1 и 2 работы ([3]).

2. Предположим теперь, что существует ненулевое достаточно полное пространство функций $PS^{A}_{\mathfrak{M}}$, определенных в некоторой области $\mathfrak{M}$, причем для каждой функции $\varphi$ выполняется оценка:

$$\left|\overline{P}^n\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)\varphi\right|\leqslant C(\varepsilon)(A+\varepsilon)^n n^n.$$

Обобщенные функции над таким пространством в случае, если $P=\partial/\partial x$, совпадают с аналитическими функционалами Фантаппиа ([4]).

Определим операцию применения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ к обобщенной функции над $PS^{A}_{\mathfrak{M}}$ по формуле

$$\left|P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)T, \varphi\right|=\left(T, \overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)}\varphi\right). \tag{4}$$

Если $T$ — функционал типа функции $T(x)$, т. е.

$$(T,\varphi)=\int\limits_{\mathfrak{M}} T(x)\varphi(x)\,dx,$$

то формула (4) будет выполнена лишь для таких функций, у которых производные, возникающие при интегрировании по частям выражения $\int\limits_{\mathfrak{M}} P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)T(x)\varphi(x)\,dx$, обращаются в нуль на границе области $\mathfrak{M}$.

Обобщенные функции над пространством $PS^{A}_{\mathfrak{M}}$ с так определенным $P$-дифференцированием применяются для доказательства единственности решения уравнения (1), к которому присоединяются условия:

$u(x,0)=u_0(x)$ и на границе области $\mathfrak{M}$ те из производных, о которых речь шла выше, обращаются в нуль при $0\leqslant t\leqslant t_0$. Доказательство ничем не отличается от предыдущего.

Таким образом, весь вопрос о единственности решения Коши и смешанной задачи с нулевыми начальными условиями сводится к вопросу о существовании достаточно полных пространств. Мы установим их существование в двух частных случаях.

3. Пусть оператор $\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x},x\right)}$ имеет аналитические коэффициенты в области $\mathfrak{M}$, причем $\frac{\partial}{\partial x}$ в $\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x},x\right)}$ входят только в первых степенях. Напишем систему

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x},x\right)}u,\quad u(x,0)=u_0(x), \tag{5}$$

где $u_0(x)$ — аналитическая функция в области $\mathfrak{M}$. Так как это система С. В. Ковалевской, то существует решение $u(x,t)$, аналитическое по $t$ в некотором интервале $0\leqslant t\leqslant R$. В силу коммутативности $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x},x\right)}$ решение системы (5) при каждом $t>0$ будет бесконечно $\overline{P}$-дифференцируемым. Для $u(x,t)$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right|\leqslant\frac{Mn!}{R^n(1-t/R)^{n+1}},\quad n=0,1,2,\ldots,$$

откуда вытекает, что

$$\left|\overline{P}\left(\frac{\partial}{\partial x},x\right)u\right|\leqslant\frac{Mn!}{R^n(1-t/R)^{n+1}}.$$

Укажем теперь достаточный запас элементов пространства $PS^A_{\mathfrak{M}}$. В качестве начальных функций возьмем полную в $L_{2[\mathfrak{M}]}$ ортонормированную систему аналитических функций $\{u_n(x)\}$. Выберем последовательность $t_{n\to 0}$ такую, что

$$|u_n(x,t_n)-u_n(x)|<\frac{1}{n}.$$

Тогда по теореме Н. К. Бари [5] $\{u_n(x,t_n)\}$ также полна в $L_{2[\mathfrak{M}]}$. Тем самым доказана единственность решения смешанной задачи с нулевыми граничными условиями для систем Ковалевской, если $\overline{P\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)}$ с аналитическими коэффициентами или если коэффициенты у $P\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ аналитические и при действительных $x$ принимают действительные значения.

4. Пусть теперь $P\left(\frac{\partial}{\partial x},x\right)$ — параболический оператор порядка $p$, т. е. уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=P\left(\frac{\partial}{\partial x},x\right)u \tag{6}$$

является параболическим в смысле И. Г. Петровского порядка $p$. Коэффициенты у $P\left(\frac{\partial}{\partial x},x\right)$ предполагаются достаточно гладкими и ограниченными вместе с их производными во всем пространстве $R_N$. Будем рассматривать решение системы с начальной функцией

$u_0(x) \in S_\alpha^\beta$. Как показал С. Д. Эйдельман ([6]), функция Грина системы (6) представляется в виде

$$Z(t, \tau, x, \xi) = G_0(t, \tau, x - \xi, x) + \int_\tau^t d\beta \int G_0(t, \beta, x - y, x)\, \varphi(\beta, \tau, y, \xi)\, dy,$$

где функция $\varphi(t, \tau, x, \xi)$ удовлетворяет уравнению

$$K(t, \tau, x - \xi, x) + \varphi(t, \tau, x, \xi) + \int_\tau^t d\beta \int K(t, \beta, x - y, x)\, \varphi(\beta, \tau, y, \xi)\, dy = 0.$$

$K(t, \tau, x - \xi, x) = \frac{\partial G_0}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right) G_0$; $G_0$ является функцией Грина системы $\frac{\partial u}{\partial t} = P_0\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u$, если параметры положить равными $x$, а $P_0$ — главная однородная часть оператора $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$.

Учитывая, что коэффициенты $P$ от $t$ не зависят, можно доказать, что решение системы (6) бесконечно дифференцируемо по $t$ при $t > 0$ и выполняется неравенство

$$\left| x^k \frac{\partial u}{\partial t^n} \right| \leqslant C_{\varepsilon\delta} (A + \varepsilon)^k (B + \delta)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}; \quad k, n = 1, 2, \ldots,$$

где $\beta = \frac{1}{p}$, $\alpha \geqslant 1 - \frac{1}{p}$, $A$ и $B$ зависят от $t$ и $u_0(x)$.

Отсюда и следует существование ненулевого пространства $PS_{\alpha, A}^{\beta, B}$. Полнота его в $L_2$ доказывается так же как и выше.

В качестве примера рассмотрим задачу Коши для уравнения Шредингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i(\Delta u - q(x, y, z) u), \quad u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z). \tag{7}$$

Поскольку оценки при доказательстве того, что $e^{tP\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)}$ является оператором в $PS_{\alpha, A}^{\beta, B}$, абсолютные, то получаем следующую теорему:

Теорема 3. *Если $q(x, y, z)$ дважды непрерывно дифференцируема и вместе с производными ограничена во всем пространстве $R$, то решение задачи Коши для уравнения* (7) *единственно в классе функций*

$$|u(x, y, z, t)| \leqslant C_1 e^{C(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Аналогичный результат справедлив и для обратного уравнения теплопроводности.

Отметим, что в этом случае совершенно аналогично доказывается единственность решения смешанной задачи, причем оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ может быть несамосопряженным.

В заключение пользуюсь случаем принести свою глубокую благодарность Г. Е. Шилову за ценные советы при обсуждении данной работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, ДАН, **102**, № 6 (1955). [2] Г. Е. Шилов, ДАН, **102**, № 5 (1955). [3] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, **8**, в. 6 (58), 3 (1953). [4] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionelle, Paris, 1951, стр. 357—477 (Дополнение F. Pelligrimo). [5] Н. К. Бари, Матем. сборн., **14** (56), 51 (1944). [6] С. Д. Эйдельман, ДАН, **98**, № 5, 913 (1954).