Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 1

МАТЕМАТИКА

И. П. ЕГОРОВ

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА V_4 НЕПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 23 III 1955)

В этой заметке рассматривается задача определения всех максимально подвижных римановых пространств V_4 ($ds^2 > 0$) непостоянной кривизны, которые являются необходимо эйнштейновыми пространствами и обладают транзитивными восьмичленными группами движений $\mathfrak{G}_8$. Этот факт следует ([1]) из того, что максимальный порядок групп движений римановых пространств (собственно римановых или псевдоримановых пространств), отличных от пространств Эйнштейна, равен точно $n(n-1)/2+1$; для пространства Эйнштейна непостоянной кривизны наибольший порядок групп движений $\mathfrak{G}_r$ не выше $n(n-1)/2+2$.

Возьмем некоторую точку M пространства V_4 с группой движений $\mathfrak{G}_8$ и введем в некоторой ее окрестности нормальные координаты y^1, y^2, y^3, y^4. Стационарная подгруппа точки M является четырехчленной подгруппой $\mathfrak{G}_4$ группы вращений $\mathfrak{G}_6$ собственно евклидова пространства E_4 и определяется следующими инфинитезимальными операторами $\left(X_{ij} = y^i \frac{\partial f}{\partial y^j} - y^j \frac{\partial f}{\partial y^i}\right)$:

$$Y_1 = X_{12} + X_{34}, \quad Y_2 = X_{12} - X_{34}, \quad Y_3 = X_{13} + X_{24}, \quad Y_4 = X_{14} - X_{23}. \quad (1)$$

Структура группы

$$[Y_2 Y_3] = 2Y_4, \quad [Y_2 Y_4] = -2Y_3, \quad [Y_3 Y_4] = 2Y_2, \quad [Y_1 Y_i] = 0, \quad i = 2, 3, 4. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь операторы нулевого порядка X_i ($i = 1, 2, 3, 4$), сдвигающие точку M. Так как искомые пространства V_4 допускают транзитивную группу движений, то нетрудно обнаружить существование таких операторов сдвигов $\overline{X}_i$, коммутаторы которых с операторами Y_j, определяющими стационарную подгруппу, разлагаются только по операторам сдвигов $\overline{X}_i$. Действительно, этот факт непосредственно следует из теоремы П. К. Рашевского ([2,3]), согласно которой всякое риманово пространство с знакоопределенной метрикой, допускающее транзитивную группу движений, является аффинно-однородным пространством (однородное пространство с транзитивной группой $\mathfrak{G}_r$ называется аффинно-однородным, если картанова метрика в алгебре Ли группы $\mathfrak{G}_r$ является невырожденной на плоскости H_m операторов, отвечающих стационарной подгруппе). Из этой теоремы следует, в частности, существование в алгебре Ли группы движений $\mathfrak{G}_r$ пространства V_4 плоскости E_4, инвариантной относительно преобразований присоединенной группы, отвечающих преобразованиям стационарной подгруппы: E_4 является ортогональным дополнением в смысле картановой метрики к плоскости H_4. Операторы сдвигов X_i из опре-

деленной таким образом плоскости E_4 (здесь и в дальнейшем операторы $\overline{X}_i$ обозначаются просто через X_i) можно записать (после надлежащих линейных комбинаций с постоянными коэффициентами исходных операторов сдвигов) в виде $X_i = p_i + a_i^\sigma(y^1, y^2, y^3, y^4)\, p_\sigma$, $p_\sigma = \partial f / \partial y^\sigma$, где функции $a_i^\sigma(y^1, y^2, y^3, y^4)$ по крайней мере первого порядка относительно y^i. Выпишем теперь коммутаторы операторов сдвигов с операторами (1):

$$\begin{aligned}
&[X_1Y_1] = X_2, \quad [X_2Y_1] = -X_1, \quad [X_3Y_1] = X_4, \quad [X_4Y_1] = -X_3,\\
&[X_1Y_2] = X_2, \quad [X_2Y_2] = -X_1, \quad [X_3Y_2] = -X_4, \quad [X_4Y_2] = X_3\\
&[X_1Y_3] = X_3, \quad [X_2Y_3] = X_4, \quad [X_3Y_3] = -X_1, \quad [X_4Y_3] = -X_2,\\
&[X_1Y_4] = X_4, \quad [X_2Y_4] = X_3, \quad [X_3Y_4[= X_2, \quad [X_4Y_4] = -X_1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Рассматривая тождества Якоби, составленные из операторов X_i, X_j, Y_k, мы находим на основании формул (3) и (2), что коммутаторы операторов сдвигов будут вида:

$$\begin{aligned}
&[X_1X_2] = -3kY_1 - kY_2, \quad [X_2X_3] = kY_4,\\
&[X_1X_3] = -kY_3, \quad [X_2X_4] = -kY_3,\\
&[X_1X_4] = -kY_4, \quad [X_3X_4] = -3kY_1 + kY_2,
\end{aligned} \tag{4}$$

причем остальные тождества Якоби удовлетворяются тождественно. Структура (2), (3), (4) рассматриваемых групп $\mathfrak{G}_8$ была также получена другим путем и в другой форме Г. Врынчяну ([4],[5]).

Далее, если принять в качестве операторов сдвигов X_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ операторы (отбрасываем требование нормальности y^i)

$$\begin{aligned}
X_1 &= p_1 + k[(y^{1^2} - y^{2^2})\, p_1 + 2y^1y^2p^2 + (y^1y^3 - y^2y^4)\, p_3 + (y^2y^3 + y^1y^4)\, p_4],\\
X_2 &= p_2 + k[2y^1y^2p_1 + (y^{2^2} - y^{1^2})\, p_2 + (y^2y^3 + y^1y^4)\, p_3 - (y^1y^3 - y^2y^4)\, p_4],\\
X_3 &= p_3 + k[(y^1y^3 - y^2y^4)\, p_1 + (y^2y^3 + y^1y^4)\, p_2 + (y^{3^2} - y^{4^2})\, p_3 + 2y^3y^4p_4],\\
X_4 &= p_4 + k[(y^2y^3 + y^1y^4)\, p_1 + (y^2y^4 - y^1y^3)\, p_2 + 2y^3y^4p_3 + (y^{4^2} - y^{3^2})\, p_4],
\end{aligned} \tag{5}$$

то непосредственной проверкой убеждаемся, что структура построенной транзитивной группы $\overline{\mathfrak{G}}_8$ с операторами (1), (5) совпадает со структурой (2), (3), (4) транзитивных групп движений $\mathfrak{G}_8$. Затем группы $\overline{\mathfrak{G}}_8$ и $\mathfrak{G}_8$ обладают общей стационарной подгруппой. Так как транзитивное представление группы однозначно определяется своей стационарной подгруппой, то мы заключаем, что всякая группа движений подобна группе $\overline{\mathfrak{G}}_8$. Для группы $\overline{\mathfrak{G}}_8$ инвариантная метрика пространства V_4 определяется следующим линейным элементом:

$$ds^2 = \frac{(k + \Sigma y^{i^2})(\Sigma\, dy^{i^2}) - (\Sigma y^i\, dy^i)^2 - (y^1\, dy^2 - y^2\, dy^1 + y^3\, dy^4 - y^4\, dy^3)^2}{(y^{1^2} + y^{2^2} + y^{3^2} + y^{4^2} + k)^2}, \qquad k \neq 0. \tag{6}$$

Структура группы $\overline{\mathfrak{G}}_8$ показывает, что параметр k можно считать равным $\varepsilon = \pm 1$ (это видно также из метрики (6)), если ввести новые базисные операторы $\overline{X}_i$ по формулам $X_i = \sqrt{\varepsilon k}\, \overline{X}_i$, где $\varepsilon = 1$, если $k > 0$ и $\varepsilon = -1$, если $k < 0$.

В случае $\varepsilon = 1$ мы получаем пространство с положительным знакоопределенным линейным элементом, в случае $\varepsilon = -1$ линейный элемент знакоопределенный отрицательный. Нетрудно установить далее, что группа движений является компактной в первом случае и некомпактной во втором.

Если учесть теперь, что отрицательной знакоопределенной инвариантной метрике ($\varepsilon = -1$) можно отнести соответствующую ей инвариантную положительную знакоопределенную метрику, то придем к следующему результату:

Теорема 1. *Существуют два и только два различных (с точностью до подобия) максимально подвижных пространства* $V_4 (ds^2 > 0)$ *непостоянной кривизны, линейные элементы которых определяются формулами*

$$ds^2 = \varepsilon \frac{\left(\varepsilon + \sum_1^4 y^{i2}\right)\left(\sum_1^4 dy^{i2}\right) - \left(\sum_1^4 y^i dy^i\right)^2 - (y^1 dy^2 - y^2 dy^1 + y^3 dy^4 - y^4 dy^3)^2}{(y^{1^2} + y^{2^2} + y^{3^2} + y^{4^2} + \varepsilon)^2},$$

$$\varepsilon = \pm 1, \tag{7}$$

причем группа движений $\mathfrak{G}_8$ *является компактной при* $\varepsilon = 1$ *и некомпактной при* $\varepsilon = -1$.

Эти выводы немедленно позволяют установить геометрическую характеристику получающихся пространств. В самом деле, если ввести новые координаты x^1, x^2, x^3, x^4 по формулам $x^1 = y^1 + iy^2$, $x^2 = y^3 + iy^4$, $x^3 = y^1 - iy^2$, $x^4 = y^3 - iy^4$, то метрика найденных максимально подвижных пространств (7) принимает вид

$$ds^2 = e^{-2v}[\varepsilon(dx^1 dx^3 + dx^2 dx^4) + (x^2 dx^1 - x^1 dx^2)(x^4 dx^3 - x^3 dx^4)], \tag{7'}$$

где положили $e^v = x^1 x^3 + x^2 x^4 + \varepsilon$.

Группа движений $\mathfrak{G}_8$ полученного нового вещественного псевдориманова пространства (7′) определяется следующими инфинитезимальными операторами:

$$x^1 p_1 - x^3 p_3, \quad x^2 p_1 - x^3 p_4, \quad x^1 p_2 - x^4 p_3, \quad x^2 p_2 - x^4 p_4, \quad \varepsilon p_1 + x^3 (x^3 p_3 + x^4 p_4),$$

$$x^1 (x^1 p_1 + x^2 p_2) + \varepsilon p_3, \quad \varepsilon p_2 + x^4 (x^3 p_3 + x^4 p_4), \quad x^2 (x^1 p_1 + x^2 p_2) + \varepsilon p_4.$$

Первые слагаемые в этих операторах, не зависящие от переменных x^3, x^4, указывают на наличие в плоскости x^1, x^2 полной проективной группы преобразований, соответствующим образом расширенной на переменные x^3, x^4, исходя из закона инцидентности точки (x^1, x^2) и прямой (x^3, x^4), принятого в форме $x^1 x^3 + x^2 x^4 + \varepsilon = 0$.

Таким образом мы приходим к пространству 0-пар (конфигураций точка + прямая) Б. А. Розенфельда ([7],[8]) комплексной проективной плоскости, если условимся считать координаты (x^1, x^2) точки (x^1, x^2, x^3, x^4) неоднородными координатами точки x, y комплексной проективной плоскости P_2, а координаты (x^3, x^4) — неоднородными тангенциальными координатами u, v проективной прямой, причем $xu + yv + \varepsilon \neq 0$.

Итак, геометрия рассматриваемых пространств связана с геометрией пространства 0-пар комплексной проективной плоскости следующим образом:

Теорема 2. *Максимально подвижные римановы пространства* $V_4 (ds^2 > 0)$ *непостоянной кривизны представляют собой вещественные формы пространства 0-пар комплексной проективной плос-*

кости, точки и прямые которых полярно сопряжены относительно эрмитовой квадрики:

$$\varepsilon + x^1\bar{x}^1 + x^2\bar{x}^2 = 0, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{8}$$

Комплексную проективную плоскость с вещественной метрикой, определяемой эрмитовой квадрикой (8) как абсолютом, называют комплексной унитарной (эрмитовой) неевклидовой плоскостью (соответственно, эллиптической или гиперболической, если группа $\mathfrak{G}_8$ является, соответственно, компактной или некомпактной).

Все эти выводы распространяются на случай четномерных пространств V_{2m}, допускающих транзитивную группу движений порядка m^2+2m с стационарной подгруппой, определенной операторами $Y_s = X_{2s-1,2s}$, $Y_{hl} = X_{2h-1,2l-1} + X_{2h,2l}$, $Z_{hl} = X_{2h-1,2l} - X_{2h,2l-1}$ $(s, h, l = 1, 2, \ldots, m)$, $h < l$. Такие пространства рассматривал Врынчяну ([6]). Они, как показывают наши исследования, перенесенные на этот случай, тоже подобны двум пространствам, представляющим собою комплексное унитарное (эрмитово) неевклидово, соответственно, эллиптическое $K_m(i)$ и гиперболическое ${}^1K_m(i)$ m-мерные пространства ([12]). Эти пространства являются A-пространствами П. А. Широкова ([11]), а также вещественными реализациями частного класса расслоенных комплексных пространств П. К. Рашевского ([1]) и пространств 0-пар Б. А. Розенфельда (конфигураций точка + гиперплоскость) комплексного m-мерного проективного пространства.

Задачу определения максимально подвижных пространств V_4 непостоянной кривизны рассматривал также Врынчяну в работах ([4],[5]). Однако вопросы, связанные с выяснением геометрической характеристики появляющихся пространств и отысканием соответствующих групп движения, оставались открытыми. Кроме того, доказанная выше теорема показывает, что зависимость совокупности максимально подвижных пространств от одной произвольной постоянной, утверждаемая в ([3]), является тривиальной: эти пространства подобны двум пространствам, и роль постоянной сводится лишь к умножению на постоянный множитель линейных элементов ([7]) (или соответствующих линейных элементов $K_m(i)$, ${}^1K_m(i)$ для общего случая).

Необходимо отметить, что еще в 1903 г. Фубини дал классификацию пространств V_4 по группам движений ([10]). Однако в результате незаконного перенесения свойств комплексных групп на вещественные группы полученная классификация, из которой следует, что максимальный порядок групп движений пространств непостоянной кривизны равен 7, является неполной, а частично опиравшаяся на нее теорема о том, что всякая группа $\mathfrak{G}_r$ движений порядка $r\,(r \neq 1,\ r \leqslant 8)$ пространства V_4 допускает подгруппу $\mathfrak{G}_{r-1}$ порядка $r-1$, оказывается неправильной, как показывает доказанная выше теорема.

В заключение автор выражает благодарность П. К. Рашевскому и Б. А. Розенфельду за замечания при обсуждении результатов этой статьи.

Поступило
8 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Егоров, ДАН, 66, № 5 (1949). [2] П. К. Рашевский, ДАН, 80, № 2 (1951). [3] П. К. Рашевский, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. IX (1952). [4] G. Vrănceanu, Studii şi Cer. Mat., 4, № 1—2 (1953). [5] G. Vrănceanu, Publ. Math., № 1—2, 24 (1953). [6] G. Vrănceanu, Studii şi Cer. Mat., 5, № 1—2 (1954). [7] Б. А. Розенфельд, Матем. сборн., 66:3, 405 (1949). [8] Б. А. Розенфельд, 125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского, М.—Л., 1952, стр. 151—166. [9] П. К. Рашевский, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. VI, 225 (1948). [10] G. Fubini, Ann. di Math., ser. 3, 9, 33 (1904). [11] П. А. Широков, Изв. ФМО при Казанск. унив. (1925). [12] И. А. Схоутен, Д. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, 2, М., 1948, стр. 259.