Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 1

МАТЕМАТИКА

Л. М. ГЛУСКИН

ПРОСТЫЕ ПОЛУГРУППЫ С НУЛЕМ

(Представлено академиком П. С. Александровым 17 II 1955)

Полугруппа G называется простой, если она не обладает нетривиальными гомоморфизмами, т. е. если всякий ее гомоморфизм является либо изоморфизмом, либо аннулирующим гомоморфизмом (отображением на полугруппу, состоящую из одного элемента). Е. С. Ляпин [1] исследовал простые коммутативные полугруппы. Оказалось, что простыми коммутативными полугруппами с нулем являются только две полугруппы:

$$G = \{0, u\}, \quad \text{где } 0^2 = 0u = u0 = u^2 = 0, \tag{1}$$

$$G = \{0, e\}, \quad \text{где } e^2 = e,\ 0^2 = e0 = 0e = 0. \tag{2}$$

В настоящей заметке дано необходимое и достаточное условие простоты полугруппы с нулем (теорема 1). Далее при помощи этого критерия показано, что в ряде случаев (теоремы 2—5) простые полугруппы с нулем сводятся к известному классу полугрупп — так называемым вполне простым полугруппам в смысле Риса [2,3,5].

Подмножество K полугруппы G называется ее нормальным комплексом [4], если при каком-либо гомоморфизме φ полугруппы G оно является полным прообразом некоторого элемента полугруппы φG.

Лемма 1. *Пусть u, v — два произвольных элемента полугруппы G. Множество $K(u, v)$ элементов $k \in G$, удовлетворяющих (при любых $x, y \in G$) условию*

$$xky = v \leftrightarrow xuy = v \ *,$$

является нормальным комплексом полугруппы G.

Доказательство. Пусть k, k' — любые два элемента из $K(u, v)$; a, b — произвольные элементы из G. Допустим, что $akb \in K(u, v)$. Тогда, по определению множества $K(u, v)$, из условия $k, k', akb \in K(u, v)$ получим при любых $x, y \in G$

$$x(ak'b)y = (xa)k'(by) = v \leftrightarrow (xa)u(by) =$$

$$= v \leftrightarrow (xa)k(by) = x(akb)y = v \leftrightarrow xuy = v.$$

Иначе говоря, $(k, k', akb \in K(u, v)) \rightarrow ak'b \in K(u, v)$. Аналогично покажем справедливость остальных двух соотношений, определяющих $K(u, v)$ как нормальный комплекс полугруппы G [4].

* В заметке использованы следующие обозначения: $\alpha \rightarrow \beta$ (если α, то β), $\alpha \leftrightarrow \beta$ ($\alpha \rightarrow \beta$ и $\beta \rightarrow \alpha$).

Лемма 2 ([2]). *Пусть G — полугруппа с нулем 0, не содержащая отличных от 0 и G идеалов. Если $GuG = 0$ хотя бы для одного ненулевого элемента $u \in G$, то G изоморфна полугруппе* (1).

Теорема 1. *Для того чтобы отличная от* (1) *полугруппа G с нулем 0 была простой, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

а) *G не содержит отличных от 0 и G идеалов;*

б) *если a, b — различные элементы из G, то найдется такая пара элементов $x, y \in G$, для которых выполняется одно и только одно из равенств $xay = 0$, $xby = 0$.*

Доказательство необходимости. Если A — отличный от 0 и G идеал полугруппы G, то отождествление всех элементов идеала A является нетривиальным гомоморфизмом полугруппы G на «разностную» фактор-полугруппу Риса $G - A$ ([2,4]), что и доказывает необходимость условия а).

Пусть, далее, u — произвольный элемент из G, $K(u, 0)$ — множество всех таких элементов $k \in G$, для которых при любых $x, y \in G$ выполняется условие $xky = 0 \leftrightarrow xuy = 0$. Из леммы 1 следует, что существует гомоморфизм φ полугруппы G, при котором $K(u, 0)$ является полным прообразом некоторого элемента из φG. Для того чтобы этот гомоморфизм был тривиальным, должно быть $K(u, 0) = G$ или $K(u, 0) = 0$.

Допустим сначала, что $K(u, 0) = G$ для некоторого элемента $u \in G$. Тогда из $0 \in K(u, 0)$ и определения $K(u, 0)$ следует, что $GuG = 0$. Воспользовавшись необходимостью условия а) и леммой 2, получим, что G совпадает с полугруппой (1).

Если G отлична от полугруппы (1), то для любого элемента $u \in G$ множество $K(u, 0)$ должно состоять из единственного элемента u, а это и означает выполнение условия б).

Достаточность условий. Пусть условия а), б) выполнены и φ — гомоморфизм полугруппы G, не являющийся изоморфизмом. Существуют два таких элемента $a, b \in G$, что $a \neq b$, $\varphi a = \varphi b$. Если, например, найдутся элементы $x, y \in G$, для которых $xay = 0$, но $c = xby \neq 0$, то из $\varphi a = \varphi b$ следует

$$\varphi c = \varphi(xby) = \varphi x \cdot \varphi b \cdot \varphi y = \varphi x \cdot \varphi a \cdot \varphi y = \varphi(xay) = \varphi 0.$$

Элемент $\varphi 0$ полугруппы φG является, очевидно, ее нулем. Полным прообразом нуля полугруппы φG является, как известно (см., например, ([4])), некоторый идеал A полугруппы G. По условию а), G не содержит отличных от 0 и G идеалов. Так как $c \in A$ и $c \neq 0$, то $A \neq 0$ и, следовательно, $A = G$, $\varphi x = \varphi 0$ для любого элемента $x \in G$ и гомоморфизм φ — аннулирующий. Теорема доказана.

Условиям только что доказанной теоремы удовлетворяет, как легко показать, любая полугруппа H, построенная следующим образом.

Пусть I и Δ — некоторые два множества элементов, соответсвенно: $i, j, k, \ldots$ и $\varkappa, \lambda, \mu, \ldots$, мощности которых m и n удовлетворяют неравенствам

$$m \leqslant 2^n, \qquad n \leqslant 2^m. \tag{3}$$

Каждому $i \in I$ (и каждому $\varkappa \in \Delta$) сопоставим непустое подмножество $\Delta_i \subset \Delta$ (соответственно $I_\varkappa \subset I$) так, что

$$\varkappa \in \Delta_i \leftrightarrow i \in I_\varkappa; \qquad \Delta_i = \Delta_j \leftrightarrow i = j; \qquad I_\varkappa = I_\lambda \leftrightarrow \varkappa = \lambda.$$

Возможность установить такое соответствие следует из условия (3). Обозначим через H дополненное нулевым элементом 0 множество

всех пар $(i\varkappa)$, где $i \in I$, $\varkappa \in \Delta$. Очевидно, что H является полугруппой относительно действия:

$$0^2 = 0\,(i\varkappa) = (i\varkappa)\,0 = 0,$$

$$(i\varkappa)\,(j\lambda) = (i\lambda), \text{ если } \varkappa \in \Delta_j, \quad (i\varkappa)\,(j\lambda) = 0, \text{ если } \varkappa \overline{\in} \Delta_j. \tag{4}$$

Полугруппа (4) является вполне простой в смысле Риса ([2],[3],[5]). Она изоморфна матричной полугруппе над единичной группой. Элементами «промежуточной» матрицы $P = (p_{\varkappa i})$ являются лишь 0 и 1, причем в ней нет двух одинаковых строк или двух одинаковых столбцов.

Если какое-либо из множеств I, Δ содержит только один элемент, то H изоморфна полугруппе (2).

Теорема 2. *Всякая отличная от полугруппы* (1) *простая полугруппа с нулем* 0, *удовлетворяющая при любых* $a, b, c \in G$ *условию*

$$(abc = 0,\ ab \neq 0) \to bc = 0, \tag{5}$$

изоморфна некоторой полугруппе типа (4).

Доказательство. Пусть a, b — любые элементы из G. Соотношения $xay = 0$, $xby \neq 0$ были бы невозможны, если бы при любых $x, y \in G$ выполнялись условия

$$xa = 0 \leftrightarrow xb = 0, \qquad ay = 0 \leftrightarrow by = 0. \tag{6}$$

В самом деле, из (5), (6) следовало бы

$$xay = 0 \leftrightarrow (xa = 0 \text{ или } ay = 0) \leftrightarrow (xb = 0 \text{ или } by = 0) \leftrightarrow xby = 0.$$

Припишем каждому ненулевому элементу $a \in G$ индексы i и $\varkappa$ следующим образом: индексы i элементов $a, b \in G$ будем считать одинаковыми тогда и только тогда, когда $xa_{i\varkappa} \leftrightarrow 0 \leftrightarrow xb_{i\lambda} = 0$ при любом $x \in G$. Аналогично элементам $a, b \in G$ припишем один и тот же индекс $\varkappa$, если $a_{i\varkappa}y = 0 \leftrightarrow b_{j\varkappa}y = 0$ для любого элемента $y \in G$.

Если бы в полугруппе G существовали два различных элемента $a_{i\varkappa}$ и $b_{i\varkappa}$ с одной и той же парой индексов i, $\varkappa$, то для этих элементов, вследствие (5), не выполнялось бы условие б) теоремы 1, и полугруппа G не была бы простой. Следовательно, только одному элементу полугруппы G можно приписать данную пару индексов i, $\varkappa$. Обозначим каждый ненулевой элемент полугруппы G через $(i\varkappa)$. Из определения индексов следует

$$(i\varkappa)\,(j\lambda) = 0 \leftrightarrow (i'\varkappa)\,(j\lambda) = 0 \leftrightarrow (i'\varkappa)\,(j\lambda') = 0. \tag{7}$$

Множество всех индексов i обозначим через I, множество всех индексов $\varkappa$ — через Δ. Вследствие (7) каждому индексу $i \in I$ соответствует некоторое подмножество $\Delta'_i \subset \Delta$, а каждому индексу $\varkappa \in \Delta$ — подмножество $I'_\varkappa \subset I$ такое, что

$$(i\varkappa)\,(j\lambda) = 0 \leftrightarrow j \in I'_\varkappa \leftrightarrow \varkappa \in \Delta'_j. \tag{8}$$

По самому определению индексов это соответствие (8) между индексами j и подмножествами Δ'_j (индексами $\varkappa$ и подмножествами $I'_\varkappa$) взаимно-однозначно.

Пусть $(i\varkappa)\,(j\lambda) \neq 0$. Обозначим $(i\varkappa)\,(j\lambda) = (s\sigma)$. Из (5) получим, что $(s\sigma)\,(k\mu) = 0 \leftrightarrow (j\lambda)\,(k\mu) = 0$ для любого элемента $(k\mu) \in G$ или, вследствие (8), $k \in I'_\sigma \leftrightarrow k \in I'_\lambda$ при любом $k \in I$, т. е. $I'_\sigma = I'_\lambda$. Из взаимной однозначности соответствия между элементами $\varkappa$ и подмножествами $I'_\varkappa$ вытекает, что $\sigma = \lambda$.

Аналогично докажем, что $s = i$ и, следовательно,

$$(i\varkappa)\,(j\lambda) = 0, \text{ если } j \in I'_\varkappa, \quad (i\varkappa)\,(j\lambda) = (i\lambda), \text{ если } j \overline{\in} I'_\varkappa.$$

Если полугруппа G отлична от полугруппы (1), то, в силу леммы 2, ни одно из подмножеств $I'_\varkappa$ не совпадает с I и, аналогично, ни одно из подмножеств Δ'_i не совпадает с Δ (иначе мы имели бы $(i\varkappa)G = 0$, $G(i\varkappa)G = 0$).

При обозначениях $I_\varkappa = I - I'_\varkappa$, $\Delta_i = \Delta - \Delta'_i$ полугруппа G, как легко видеть, совпадает с полугруппой (4). Теорема доказана.

Подмножество $L \subset G$ называется левым идеалом полугруппы G, если $GL \subset G$. Левый идеал L полугруппы G называется минимальным, если L не содержит отличных от 0 и L левых идеалов полугруппы G.

Теорема 3. *Простая полугруппа с нулем, содержащая минимальный левый (правый) идеал и отличная от полугруппы* (1), *изоморфна полугруппе типа* (4).

Доказательство. Достаточно показать, что для любых трех элементов a, b, c полугруппы G, содержащей минимальный левый идеал, выполняется условие (5).

Допустим, что $abc = 0$ и $ab \neq 0$. Тогда Gb является отличным от 0 ($ab \neq 0$) левым идеалом полугруппы G. Полугруппа G является теоретико-множественной суммой своих минимальных левых идеалов ([3], теорема 2.1). Если L — тот минимальный левый идеал полугруппы G, в котором содержится b, то $Gb \subset L$ и, в силу минимальности L, $Gb = L$.

Обозначим через L' множество всех таких элементов $l \in G$, что $lc = 0$. Очевидно, что L' — левый идеал полугруппы G. Тогда $L' \cap Gb$ — отличный от 0 левый идеал G ($ab \in L' \cap Gb$). Из минимальности Gb следует, что $L' \cap Gb = Gb$ и, следовательно, $Gb \subset L'$, $Gbc = 0$, $GbcG = 0$. Из леммы 2 следует, что $bc = 0$. Остается применить лишь теорему 2.

Полугруппа, вполне простая в смысле Риса, содержит минимальный левый идеал. Если полугруппа G не содержит отличных от 0 и G идеалов, отлична от полугруппы (1) и для нее выполняется одно из условий:

I. Порядок каждого элемента полугруппы G конечен ([2]).

II. G содержит примитивный идемпотент ([5])*,

то G вполне проста в смысле Риса. Отсюда следуют теоремы 4 и 5.

Теорема 4. *Простая полугруппа с нулем, содержащая примитивный идемпотент, изоморфна полугруппе типа* (4).

Теорема 5. *Простая полугруппа с нулем, каждый элемент которой конечного порядка***, *изоморфна либо полугруппе* (1), *либо полугруппе вида* (4).

Харьковский государственный
педагогический институт
им. Г. С. Сковороды

Поступило
20 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. С. Ляпин, Изв. АН СССР, сер. матем., **14**, № 3, 275 (1950). [2] D. Rees, Proc. Cambr. Phil. Soc., **36**, 387 (1940). [3] A. H. Clifford, Am. J. Math., **71**, № 4, 834 (1949). [4] Е. С. Ляпин, Изв. АН СССР, сер. матем., **14**, № 2, 179 (1950). [5] D. Rees, Proc. Cambr. Phil. Soc., **37**, 434 (1941).

* Т. е. такой ненулевой идемпотент e, для которого не существует отличного от 0 и e идемпотента f, удовлетворяющего условию $ef = fe = f$.

** Можно показать, что существуют только две отличные от простых групп простые полугруппы без нуля, все элементы которых конечного порядка. Обе они являются некоммутативными полугруппами, состоящими из двух элементов каждая.