Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 2

ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

О БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧАМИ О ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

(Представлено академиком В. А. Фоком 5 II 1955)

Ряд граничных задач электродинамики, связанных с полубесконечными периодическими структурами, может быть сведен к бесконечной системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами типа

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n Z_{m-n} = B_m, \quad m \geqslant 0. \tag{1}$$

Займемся решением уравнений (1) относительно неизвестных A_n при следующих предположениях о поведении заданных последовательностей Z_m и B_m:

$$r_1 > r_2, \quad r_0 > r_2, \tag{2}$$

где

$$r_1^{-1} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|Z_m|}, \quad r_2 = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|Z_{-m}|}, \quad r_0^{-1} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|B_m|}.$$

В наиболее интересном для практики случае, когда $Z_{-m} = Z_m$, условия (2) принимают вид:

$$r_1 = r_2^{-1} > 1, \quad r_0 > r_2. \tag{2a}$$

Переходя к решению системы (1), построим прежде всего функции

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n w^n, \quad g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n w^n, \quad G(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n w^n. \tag{3}$$

Как это следует из условий (2), функция $g(w)$ голоморфна в круге $|w| < r_0$, а $G(w)$ — в кольце $r_2 < |w| < r_1$. Предположим также, что искомая функция $f(w)$ голоморфна, как это будет показано ниже, в круге $|w| < r$, где r — наименьшее из чисел r_0 и r_1. Тогда величины A_n, являющиеся коэффициентами разложения $f(w)$ в ряд Тейлора, можно выразить при помощи формул Коши

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw, \quad n \geqslant 0, \tag{4}$$

где c — произвольный контур (в круге $|w| < r$), охватывающий начало координат, который нам удобно выбрать лежащим в кольце $r_2 < |w| < r$.

Для последующего важно отметить, что из условия голоморфности функции $f(w)$ при $|w|<r$ немедленно следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{(c)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw=0 \quad \text{при } n<0, \tag{4а}$$

и наоборот.

Вернемся теперь к системе (1) и подставим в нее вместо A_n выражение (4):

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}Z_{m-n}\oint\limits_{(c)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw=B_m \quad \text{при } m\geqslant 0. \tag{5}$$

Учитывая (4а), можно в равенствах (5) суммирование по n проводить от $-\infty$ до $+\infty$. Поменяв, кроме этого, в (5) местами суммирование и интегрирование получим

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(c)}\frac{f(w)}{w}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Z_{m-n}\frac{1}{w^n}\,dw=B_m, \quad m\geqslant 0. \tag{5а}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{Z_{m-n}}{w^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{Z_n}{w^{m-n}}=\frac{1}{w^m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Z_nw^n=\frac{1}{w^m}G(w) \tag{6}$$

и (учитывая (3), а также формулы Коши для коэффициентов ряда Тейлора)

$$B_m=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{(c)}\frac{g(w)}{w^{m+1}}\,dw, \quad m\geqslant 0. \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в уравнения (5а), придадим им окончательный вид

$$\oint\limits_{(c)}\frac{f(w)G(w)-g(w)}{w^{m+1}}\,dw=0 \quad \text{при } m\geqslant 0. \tag{8}$$

Уравнения (8) получены из заданной системы (1) при условии выполнения равенств (4а)

$$\oint\limits_{(c)}\frac{f(w)}{w^{m+1}}\,dw=0 \quad \text{при } m<0. \tag{8а}$$

Поэтому решение системы (1) сводится к нахождению функции $f(w)$, удовлетворяющей уравнениям (8) и (8а). Последнюю задачу, в свою очередь, легко привести к неоднородной задаче Гильберта. Применительно к нашему случаю задачу Гильберта удобно сформулировать следующим образом.

Необходимо найти кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(w)=\begin{cases}\Phi^+(w) & \text{при } w\in s^+,\\ \Phi^-(w) & \text{при } w\in s^-\end{cases} \tag{9}$$

(где $\Phi^+(w)$ голоморфна в области s^+, внешней по отношению к контуру c, и стремится к нулю при $|w|\to\infty$, а $\Phi^-(w)$ — голоморфна в области s^-, внутренней по отношению к c по граничному условию

$$\Phi^+(t)=\Phi^-(t)G(t)-g(t) \quad \text{на контуре } c. \tag{10}$$

Здесь $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на c функции, удовлетворяющие условию Гельдера (H), причем $G(t)\neq 0$ на c; $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ — граничные значения $\Phi(w)$ на c при стремлении w к точке t контура c из областей s^+ и s^-, соответственно. Поскольку определенные формулами (3) функции G и g безусловно удовлетворяют условию (H), то, решив задачу

Гильберта* (9), (10), немедленно найдем функцию $f(w)$, положив

$$f(w) = \Phi^-(w). \tag{11}$$

Действительно, подставив (11) в уравнения (8) и (8а), перепишем их, учитывая (10), в виде

$$\int_{(c)} \frac{\Phi^+(w)}{w^{m+1}} dw = 0 \quad \text{при } m \geqslant 0; \qquad \int_{(c)} \frac{\Phi^-(w)}{w^{m+1}} dw = 0 \quad \text{при } m < 0.$$

Вследствие голоморфности Φ^+ и Φ^- в областях s^+ и s^- и стремлении $\Phi^+(w) \to 0$ при $|w| \to \infty$ эти равенства тождественно удовлетворяются. Поскольку c — произвольный контур, лежащий в кольце $r_2 < |w| < r$, то предположение о голоморфности $f(w)$ при $|w| < r$ действительно выполняется (см. (11)). Впрочем, это и не нуждается в проверке, так как непосредственно следует из условий (8а), которые совместно с (8) положены в основу определения $f(w)$. Определив $f(w)$ (формула (11)), немедленно найдем решение исходной системы (1) по формуле (4).

Таким образом, решение сведено к задаче Гильберта, которая подробно изучена (см. [1], гл. III, § 37).

Отсылая за подробностями к работе [1], выпишем оттуда решение неоднородной задачи Гильберта (9) — (10) для частного случая ($\ln G(t)$ однозначен** на c), когда оно всегда существует и единственно***,

$$\Phi(w) = \frac{X(w)}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-w)}. \tag{12}$$

Здесь $X(w)$ — каноническое решение однородной задачи Гильберта, т. е. задачи (9) — (10) при $g(t) \equiv 0$ ипри условии, что $X(w)$ остается конечным, когда $|w| \to \infty$.

Для иллюстрации метода рассмотрим волновод прямоугольного сечения ($a \times b$), в котором может распространяться только волна H_{10}. Вдоль положительной полуоси z волновода установим в плоскости симметрии перпендикулярно широкой стенке a бесконечный ряд металлических стержней длины b на расстоянии l друг от друга. Если на стержни со стороны отрицательных z падает волна H_{10}, то в стержнях возбуждаются токи, величина которых не меняется вдоль стержней. Для нахождения поля в такой системе достаточно определить токи A_n ($n \geqslant 0$), наведенные в стержнях падающей волной. Токи A_n удовлетворяют системе уравнений типа (1). Для того чтобы получить ее, определим y-овую компоненту (параллельную оси стержней) электрического вектора $E^{n,m}$ основной волны H_{10}, возбуждаемой током A_n n-го стержня на оси m-го стержня:

$$E_{n,m} = \alpha A_n e^{-i\gamma l|m-n|}, \quad m \neq n,$$
$$\gamma = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}, \qquad \alpha = -\frac{120\,\pi k}{\gamma a}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{13}$$

Если l настолько велика, что высшие типы волн успеют затухнуть на длине l, то, учитывая граничные условия на поверхности стержней, можно написать

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' A_n \alpha e^{-i\gamma l|m-n|} + e^{-i\gamma l m} = 0, \quad m \geqslant 0, \tag{14}$$

---

* Так как в нашем случае G голоморфно в окрестности контура c, то небольшой деформацией c можно добиться, чтобы $G(t) \neq 0$ на c.

** Это выполняется, в частности, когда в формуле (3) $Z_{-m} = Z_m$.

*** Если $\arg G(t)$ получает положительное приращение, когда t обходит c против часовой стрелки, то для существования решения необходимо наложить добавочные условия на коэффициенты B_m (см. [1], § 37).

где $e^{-i\gamma lm}$ — y-овая составляющая электрического вектора падающей волны на оси m-го стержня.

При этом, как обычно, учитывая малость радиусов ρ стержней, наведенная эдс $E_{n,m}\cdot 1$ берется не на поверхности стержня, а на его оси. Исключение составляет эдс $E_{m,m}\cdot 1$, наведенная собственным током, на что указывает штрих у знака суммы. Это означает, что при $n=m$ коэффициент у A_m должен быть взят равным

$$Z_0=\frac{E_{m,m}}{A_m}\cong 60\ ki\ln\left(\frac{\beta k\rho}{2}\right),\quad \beta=1{,}781. \tag{14a}$$

Для решения уравнений (14), которые аналогичны системе (1), применим изложенную выше методику. Функции G и g (см. (3)) имеют теперь вид

$$G(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\alpha e^{-i\gamma l|n|}w^n=\alpha\left\{Z_0+\frac{w}{e^{i\gamma l}-w}+\frac{e^{-i\gamma l}}{w-e^{-i\gamma l}}\right\},\quad r_2<|w|<r_1; \tag{15}$$

$$g(w)=-\sum_{n=0}^{\infty}e^{-i\gamma ln}w^n=\frac{e^{i\gamma l}}{w-e^{i\gamma l}},\quad |w|<r_0, \tag{16}$$

где $r_1=r_2^{-1}=|e^{i\gamma l}|>1$, $r_0=|e^{i\gamma l}|$, т. е. условия (2а) выполнены.

При этом мы предположили (на время), что $\operatorname{Im}\gamma<0$, т. е. что среда, заполняющая волновод, обладает некоторыми потерями. Каноническое решение однородной задачи Гильберта для $G(t)$ в рассматриваемом случае находится элементарно. Пусть контур c совпадает с кругом $|w|=1$, тогда из (15) следует

$$X(w)=\begin{cases}X^+(w)\equiv\alpha(Z_0-1)\dfrac{w-w_1}{w-e^{-i\gamma l}}, & w\in s^+,\\[2ex] X^-(w)\equiv\dfrac{w-e^{i\gamma l}}{w-w_2}, & w\in s^-,\end{cases} \tag{17}$$

где

$$w_{1,2}=\cos\gamma l+i\frac{\sin\gamma l}{Z_0-1}\mp\sqrt{\left(\cos\gamma l+i\frac{\sin\gamma l}{Z_0-1}\right)^2-1},\quad |w_1|<1,\ |w_2|>1.$$

Используя формулы (11), (12), (16) и (17), получим

$$f(w)=\frac{2\sin\gamma l e^{i\gamma l}}{i\alpha(Z_0-1)(w_1-e^{i\gamma l})}\frac{1}{w-w_2}, \tag{18}$$

после чего токи A_n найдем при помощи формулы (4):

$$A_n=\frac{2i\sin\gamma l e^{i\gamma l}}{\alpha(Z_0-1)(w_1-e^{i\gamma l})}\frac{1}{w_2^{n+1}},\quad n\geqslant 0.$$

Полученное решение, очевидно, справедливо и при вещественном γ. Если $\gamma l=\pi n$, то $A_n=0$. Коэффициент отражения в сечении $z=0$, где расположен стержень с $n=0$, очевидно, равен

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha A_n e^{-i\gamma ln}=\frac{2i\sin\gamma l e^{i\gamma l}}{(Z_0-1)(w_1-e^{i\gamma l})(w_2-e^{-i\gamma l})}.$$

При $\gamma l=n\pi$ $R=-1$.

Поступило
5 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946.