Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ

О ПЛАСТИЧЕСКОМ РАВНОВЕСИИ МНОГОСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 10 I 1955)

В статье автора (1) установлены конечные соотношения между усилиями и моментами при пластическом равновесии однослойной анизотропной оболочки. В настоящем исследовании предыдущие результаты обобщаются для случая пластического равновесия многослойной оболочки. Расширен класс изучаемых задач.

При установлении конечных соотношений между усилиями и моментами используются следующие предположения лишь конструктивного и статического характера:

А. Строение оболочки симметрично относительно срединной поверхности. (Два равноудаленных от срединной поверхности слоя $(\pm k)$ одинаковы по толщине (равной h_k) и по своим механическим характеристикам. Поверхность спая средней (нулевой) пары слоев совпадает со срединной поверхностью.)

Б. Материал слоев ортотропен. Плоскости пластической симметрии отдельных слоев оболочки параллельны между собою и ортогональны к координатным осям, которые совпадают с нормалью к срединной поверхности и главными направлениями на ней.

В. Постоянные анизотропии для какого-либо k-го слоя пропорциональны постоянным нулевого слоя.

Г. Напряженное состояние слоев оболочки является обобщенно плоским (послойные значения напряжений X_{xk}, Y_{yk}, X_{yk} предполагаются постоянными по толщине каждого слоя в отдельности).

Следовательно, для каждой пары симметрично расположенных слоев выполняется следующее условие пластичности (2):

$$\eta_k (G+H) X_{xk}^2 - 2\eta_k H X_{xk} Y_{yk} + \eta_k (H+F) Y_{yk}^2 + 2\eta_k N X_{yk}^2 = 1, \qquad (1)$$

где $\eta_k > 0$; $\eta_0 = 1$; G, H, F, N — постоянные анизотропии.

Д. Значения одноименных напряжений (X_{xk}, $X_{x,\,k+1}$ и т. д.) вдоль поверхности спая двух смежных слоев $(k,\ k+1)$ удовлетворяют соотношениям, вытекающим из рассмотрения одноосного растяжения многослойной призматической полосы. Именно:

$$\eta_k X_{xk}^2 = \eta_{k+1} X_{x,k+1}^2, \quad \eta_k Y_{yk}^2 = \eta_{k+1} Y_{y,k+1}^2, \quad \eta_k X_{yk}^2 = \eta_{k+1} X_{y,k+1}^2. \qquad (2)$$

Покажем, что каждое из напряжений X_{xk}, Y_{yk}, X_{yk} можно представить в виде суммы двух кусочно-непрерывных функций — четной и нечетной по z (z откладывается по нормали к срединной поверхности оболочки).

Действительно, будем рассматривать напряжения X_{xk}, Y_{yk}, X_{yk} как произвольные кусочно-непрерывные функции z, отличные от нуля лишь в симметрично расположенных областях $\left(-\sum_0^{k-1} h_\nu, -\sum_0^{k} h_\nu\right)$, $\left(\sum_0^{h-1} h_\nu, \sum_0^{h} h_\nu\right)$. Пусть $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ — некоторые непрерывные функции, совпадающие с напряжениями X_{xk}, Y_{yk}, X_{yk} там, где последние отличны от нуля. В силу теоремы Вейерштрасса каждая из функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ сколь угодно хорошо может быть аппроксимирована многочленом от z и, следовательно, представлена как сумма двух функций: четной и нечетной по z. Стало быть, подобное представление допускают и напряжения X_{xk}, Y_{yk}, X_{yk}, совпадающие с функциями $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ в симметрично расположенных областях. Следовательно, соотношение (1) распадается [1] на следующие два соотношения:

$$\eta_{1k}(G+H)(p_{xk}^2+\sigma_{xk}^2)-2\eta_{1k}H(p_{xk}p_{yk}+\sigma_{xk}\sigma_{yk})+\eta_{1k}(H+F)(p_{yk}^2+\sigma_{yk}^2)+$$
$$+2\eta_{1k}N(s_k^2+\tau_k^2)=1, \tag{3}$$

$$(G+H)p_{xk}\sigma_{xk}-H(p_{xk}\sigma_{yk}+\sigma_{xk}p_{yk})+(H+F)p_{yk}\sigma_{yk}+2Ns_k\tau_k=0, \tag{4}$$

где четные относительно z функции p_{xk}, p_{yk}, s_k представляют собою мембранные напряжения, а нечетные функции σ_{xk}, σ_{yk}, τ_k — напряжения изгиба и кручения.

Ниже исследуется простейшее сложное напряженное состояние оболочки, при котором выполняется одно из следующих четырех условий статического характера: а) $p_{xk}=s_k=0$; b) $p_{xk}=\tau_k=0$; c) $\sigma_{xk}=\tau_k=0$; *d*) $\sigma_{xk}=s_k=0$.

Рассмотрим подробнее случай $p_{xk}=s_k=0$. На основании (3) и (4) имеем:

$$\eta_{1k}\frac{GH+HF+FG}{H+F}\sigma_{xk}^2+\eta_{1k}(H+F)p_{yk}^2+2\eta_{1k}N\tau_k^2=1. \tag{5}$$

Согласно соотношениям (2) и (5) вдоль поверхности спая соблюдаются следующие условия:

$$\sigma_{xk}/\sigma_{x,k+1}=p_{yk}/p_{y,k+1}=\tau_k/\tau_{k+1}=\sqrt{\eta_{1k+1}}/\sqrt{\eta_{1k}}. \tag{6}$$

Последние дают возможность выразить напряжения σ_{xk}, p_{yk} и τ_k через соответствующие напряжения нулевого слоя:

$$\sigma_{xk}=\sigma_{x0}/\sqrt{\eta_{1k}},\quad p_{yk}=p_{y0}/\sqrt{\eta_{1k}},\quad \tau_k=\tau_0/\sqrt{\eta_{1k}}. \tag{7}$$

При помощи (7) устанавливаются зависимости между моментами и усилием, с одной стороны, и наряжениями нулевого слоя — с другой:

$$M_x=2\sigma_{x0}\sum_0^n S_k/\sqrt{\eta_{1k}},\quad T_y=2p_{y0}\sum_0^n F_k/\sqrt{\eta_{1k}},\quad M_{xy}=2\tau_0\sum_0^n S_k/\sqrt{\eta_{1k}}, \tag{8}$$

где $F_k=1\cdot h_k$ — площадь, а $S_k=1\cdot h_k\left(\frac{h_k}{2}+\sum_0^{k-1} h_\nu\right)$ — статический момент относительно срединной поверхности k-й элементарной полоски

шириной 1. Используя соотношения (8) и (5) при $k = 0$, получим:

$$\frac{GH + HF + FG}{H + F}\left(\frac{M_x}{2\sum\limits_0^n S_k/\sqrt{\eta_k}}\right)^2 + (H + F)\left(\frac{T_y}{2\sum\limits_0^n F_k/\sqrt{\eta_k}}\right)^2 +$$

$$+ 2N\left(\frac{M_{xy}}{2\sum\limits_0^n S_k/\sqrt{\eta_k}}\right)^2 = 1. \qquad (9)$$

Конечные соотношения для случаев b), c), d) устанавливаются аналогично.

Займемся теперь выяснением деформационных свойств оболочки, а также оценкой предыдущих результатов на основе «точной» теории. Под «точной» будем подразумевать теорию, построенную на постулатах Кирхгоффа — Лява, дополненных, следуя А. А. Ильюшину ([3]), предположением о несжимаемости материала. Будем предполагать, что скольжение слоев друг по другу невозможно.

Для случая a) напряженного состояния оболочки имеем следующие зависимости между напряжениями и скоростями деформации ([2]):

$$\dot{\varepsilon}_1 - z\dot{\varkappa}_1 = \eta_k \lambda_k \left(\frac{GH + HF + FG}{H + F}\sigma_{xk} - H p_{yk}\right),$$

$$\dot{\varepsilon}_2 - z\dot{\varkappa}_2 = \eta_k \lambda_k (H + F) p_{yk}, \quad \dot{\varepsilon}_{12} - z\dot{\varkappa}_{12} = \eta_k \lambda_k N \tau_k, \qquad (10)$$

где $\dot{\varepsilon}_1$, $\dot{\varepsilon}_2$, $\dot{\varepsilon}_{12}$, $\dot{\varkappa}_1$, $\dot{\varkappa}_2$, $\dot{\varkappa}_{12}$ обозначают, соответственно, скорости деформации удлинения, сдвига и искривления срединной поверхности; λ_k — положительный множитель.

Используя зависимость (10), нетрудно показать, что $(H + F)\dot{\varepsilon}_1 + H\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varkappa}_2 = \dot{\varepsilon}_{12} = 0$.

После этого на основании (5) и (10) легко определяются и послойные значения множителя λ_k:

$$\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{\eta_k}}\sqrt{\frac{\dot{\varepsilon}_2^2}{H + F} + \left(\frac{H + F}{GH + HF + FG}\dot{\varkappa}_1^2 + \frac{2}{N}\dot{\varkappa}_{12}^2\right)z^2}. \qquad (11)$$

Условия неразрывности деформаций вдоль поверхности спая приводят к соотношениям (6) и, следовательно, подтверждают справедливость принятого в начале статьи допущения Д.

Легко обозримой является и погрешность конечного соотношения (9), обусловленная предположением Г.

Опираясь на формулы (9) и (10) работы ([1]), можно утверждать, что максимальное отклонение приближенного соотношения (9) от точного не превосходит 9%. Представление о влиянии этого отклонения на точность окончательного результата можно получить, например, путем сопоставления точного и приближенного решений задачи о несущей способности полубесконечно длинной однослойной ($n = k = 0$) анизотропной цилиндрической оболочки, край которой подвергается действию перерезывающей силы N_0.

Пусть a и $h = 2h_0$ — соответственно, радиус и толщина оболочки. Если ввести в рассмотрение безразмерные величины $\bar{x}$, ζ, ξ, $\bar{N}$ согласно формулам

$$x = \bar{x}\sqrt{\frac{\sqrt{3}(GH + HF + FG)}{(H+F)ah}}, \quad \zeta^2 = \frac{4(GH + HF + FG)}{3(H+F)}\frac{16M_x^2}{h^4},$$

$$\xi^2 = (H+F)\frac{T_y^2}{h^2}, \quad \bar{N} = \frac{d\zeta}{d\bar{x}} = \frac{8N}{h}\sqrt{\frac{a\sqrt{GH + HF + FG}}{3h\sqrt{3}}},$$

то уравнение равновесия и конечное соотношение (9) примут вид:

$$\frac{d^2\zeta}{d\bar{x}^2} + \frac{8}{3}\xi = 0, \quad \xi^2 \mp \frac{3}{4}\zeta^2 = 1.$$

Таким образом, благодаря введению безразмерных величин $\bar{x}$, ζ, ξ, $\bar{N}$ задача свелась к уже решенной А. А. Ильюшиным ([3]) задаче для однослойной изотропной оболочки. Сохраняя пути решения Ильюшина, эту же задачу можно решить и точно, опираясь уже на точную зависимость между ξ и ζ (см. формулу (9) работы ([1])). Отношение точного значения N_0 к приближенному $\approx 1{,}02$. Это отношение еще меньше уклоняется от единицы в случае действия на оболочку кроме перерезывающей силы N_0 и распределенной нагрузки p.

Можно показать полную пригодность допущения Г и для остальных случаев b), c), d) напряженного состояния оболочки. При этом множитель λ_k попрежнему является четной функцией, подобной (11), а скорости деформации удовлетворяют зависимостям

b) $(H+F)\dot{\varepsilon}_1 + H\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varkappa}_2 = \dot{\varkappa}_{12} = 0$, c) $(H+F)\dot{\varkappa}_1 + H\dot{\varkappa}_2 = \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varkappa}_{12} = 0$,

d) $(H+F)\dot{\varkappa}_1 + H\dot{\varkappa}_2 = \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_{12} = 0$.

Конечные соотношения имеют существенное значение и при исследовании упруго-пластического равновесия оболочек, особенно, если в последних отсутствуют смешанные по толщине упруго-пластические области. О возможности пренебрежения такими областями (для класса оболочек, в которых распространение пластической деформации происходит симметрично срединной поверхности) по существу подсказывает приближенная техническая теория Ю. Н. Работнова ([4]).

Для применяемых в инженерной практике конструкций многослойных оболочек, как правило, $\tau_{ik+1} < \tau_{ik}$. В оболочках такого типа, как это можно заключить из рассмотрения соотношений (10) и (11), пластическая деформация может появиться одновременно в нескольких слоях.

При достаточно плавном убывании τ_{ik} смешанные по толщине многослойной оболочки упруго-пластические области раздаются вдоль срединной поверхности менее интенсивно, чем в однослойной оболочке.

Следовательно, основное упрощающее допущение технической теории Работнова (о пренебрежении такими областями) может быть использовано и в теории многослойных оболочек, если заранее известно, что погрешность решения соответствующей задачи для однослойной оболочки является приемлемой.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз.ССР

Поступило
5 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ш. Микеладзе, ДАН, 98, № 6 (1954). [2] R. Hill, Mathematical Theory of Plasticity, 1950. [3] А. А. Ильюшин, Пластичность, 1948. [4] Ю. Н. Работнов, Прикладн. матем. и мех., 15, в. 2 (1951).