Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

А. А. ГРИБ

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКИХ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 2 II 1955)

1. Уравнения одномерного неустановившегося движения идеального газа имеют вид (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}=0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial r}+(n-1)\frac{\rho u}{r}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\rho^k}\right)+u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho^k}\right)=0,$$

где k — показатель адиабаты; $n=1$ для плоских, $n=2$ для цилиндрических и $n=3$ для сферических волн. Введя скорость звука, эти уравнения можно записать в форме (2)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2}{k-1}a\frac{\partial a}{\partial r}=\frac{a^2}{k-1}\frac{\partial \ln \vartheta}{\partial r},$$

$$a\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2}{k-1}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{2}{k-1}u\frac{\partial a}{\partial r}+(n-1)\frac{au}{r}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t}+u\frac{\partial \vartheta}{\partial r}=0,$$

где $a^2=\frac{kP}{\rho}$; $\frac{P}{\rho^k}=\vartheta^k$.

Уравнения (2) обладают частными решениями вида

$$u=T(t)\,V(r), \quad a=T(t)\,C(r), \quad \vartheta=T_1(t)\,S(r), \qquad (3)$$

где

$$T(t)=\frac{1}{1+mt}, \quad T_1(t)=\frac{1}{(1+mt)^q}; \qquad (4)$$

$m=\text{const}$; $q=\text{const}$; $V(r)$, $C(r)$ и $S(r)$ — функции, определяемые уравнениями:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{C^2}{k-1}\right)=mV+\frac{C^2}{k-1}\frac{mq}{V},$$

$$\frac{d}{dr}\ln\left[VC^{\frac{2}{k-1}}r^{(n-1)}\right]=\frac{2}{k-1}\frac{m}{V}, \qquad (5)$$

$$V\frac{d\ln S}{dr}=mq.$$

В случае стационарного движения газа ($m=0$) интегрирование (5) приводит к интегралу Бернулли и уравнению постоянства расхода. При $m=0$, $n=2$ и $n=3$ уравнения (5) описывают течения от плоского и пространственного стационарных источников.

При $m\neq 0$, $q=0$, $n=2$ и $n=3$ при помощи (3), (4), (5) можно построить изэнтропические течения от нестационарных источников, интенсивность которых меняется по закону

$$Q=(1+mt)^{-\frac{k+1}{k-1}}Q_0(r), \tag{6}$$

где

$$Q_0(r)=Q_0(r_0)\exp\left[\frac{2m}{k-1}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{V}\,dr\right], \tag{7}$$

$$Q_0(r_0)=\pi(k\vartheta_0^k)^{-\frac{1}{k-1}}2^{(n-1)}V_0C_0^{\frac{2}{k-1}}r_0^{(n-1)}.$$

При $m\neq 0$, $q\neq 0$

$$Q=(1+mt)^{\frac{k(q-1)-1}{k-1}}Q_1(r), \tag{8}$$

где

$$Q_1(r)=Q_1(r_0)[S(r)]^{\frac{2-kq}{(k-1)q}}, \tag{9}$$

$$Q_1(r_0)=\pi(k)^{-\frac{1}{k-1}}2^{(n-1)}V_0C_0^{\frac{2}{k-1}}r_0^{(n-1)}[S(r_0)]^{\frac{2}{(k-1)q}}.$$

Параметры газа за фронтом плоской, цилиндрической или сферической ударной волны, распространяющейся по течению (3) со скоростью перемещения

$$N=\frac{L}{1+mt}, \tag{10}$$

легко могут быть найдены из условий динамической совместимости, записанных в форме Л. И. Седова (1). Имеем:

$$u_2=\frac{1}{1+mt}\left\{V_1(r)+\frac{2}{k+1}(L-V_1)\left[1-\frac{C_1^2}{(L-V_1)^2}\right]\right\},$$

$$a_2^2=\frac{2k(k-1)}{(k+1)^2}\frac{(L-V_1)^2}{(1+mt)^2}\left[1-\frac{(k-1)^2-4k}{2k(k-1)}\frac{C_1^2}{(L-V_1)^2}-\frac{1}{k}\frac{C_1^4}{(L-V_1)^4}\right], \tag{11}$$

$$\vartheta_2^k=\vartheta_1^k\frac{2k}{(k+1)\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^k}\frac{(L-V_1)^2}{C_1^2}\left[1-\frac{k-1}{2k}\frac{C_1^2}{(L-V_1)^2}\right]\left[1-\frac{2}{(k-1)}\frac{C_1^2}{(L-V_1)^2}\right]^k,$$

где u_2, a_2, ϑ_2 — параметры газа за фронтом ударной волны; u_1, a_1, ϑ_1 — перед фронтом; L — постоянная.

2. Рассмотрим теперь изэнтропическое течение газа с плоскими волнами ($n=1$).

Определяя из системы (5) при $q=0$ производные, получим:

$$\frac{dV}{dr}=\frac{2\left[m\left(\frac{V^2}{2}-\frac{C^2}{k-1}\right)+\frac{n-1}{2r}VC^2\right]}{V^2-C^2},$$

$$\frac{dC}{dr}=\frac{\frac{(k-1)}{2}VC\left(\frac{3-k}{k-1}m-\frac{n-1}{r}V\right)}{V^2-C^2}. \tag{12}$$

При $n = 1$

$$\frac{dV}{dC} = \frac{\frac{V^2}{C^2} - \frac{2}{k-1}}{\frac{3-k}{2}\frac{V}{C}} \tag{13}$$

или

$$V = \pm \frac{2}{k-1} C \left\{ 1 + \left[\frac{(k-1)^2}{4} \frac{V_0^2}{C_0^2} - 1 \right] \left(\frac{C}{C_0} \right)^{\frac{2(k-1)}{3-k}} \right\}^{1/2}. \tag{14}$$

Подставляя (14) во второе уравнение (12), в котором $n = 1$, получим

$$\frac{dC}{dr} = \frac{\pm (3-k)\, m \left\{ 1 + \left[\frac{(k-1)^2}{4} \frac{V_0^2}{C_0^2} - 1 \right] \left(\frac{C}{C_0} \right)^{\frac{2(k-1)}{3-k}} \right\}^{1/2}}{(k-1) \left\{ \frac{4}{(k-1)^2} \left[\left(\frac{V_0}{C_0} \right)^2 - \frac{4}{(k-1)^2} \right] \left(\frac{C}{C_0} \right)^{\frac{2(k-1)}{3-k}} - 1 \right\}}. \tag{15}$$

Уравнение (15) легко интегрируется.

3. При $q = 0$ для системы (5) можно указать следующие частные решения:

$$V = \frac{2m}{2 + n(k-1)} r, \quad C = \frac{m(k-1)\sqrt{n}}{2 + n(k-1)} r; \tag{16}$$

$$V = mr, \quad C = C_0 = \text{const}, \quad k = 1 + \frac{2}{n}. \tag{17}$$

В заключение отметим, что течение типа (3), (4) может быть рассмотрено так же и в случае нестационарного осесимметрического движения газа.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
1 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, 1954. [2] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. II, 1948.