Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 2

МАТЕМАТИКА

И. Н. ПЕСИН

К ТЕОРИИ ОБЩИХ Q-КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 14 II 1955)

Мы будем рассматривать некоторые классы гомеоморфных отображений

$$w = f(z) \tag{1}$$

круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$. Введем следующие определения:

Определение 1. Семейство $C(z,\ k)$ кривых C_α $(0<\alpha<1)$ называется регулярным с параметром k $(0<k<\infty)$ относительно точки z, если C_α являются прообразами окружностей $|t|=\alpha$ при гомеоморфном отображении круга $|t|<1$ на некоторую окрестность точки z, причем $t=0$ переходит в точку z и выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{\alpha\to 0}} \frac{\max\limits_{z'\in C_\alpha} |z'-z|}{\min\limits_{z'\in C_\alpha} |z'-z|} = k.$$

Определение 2. Отображение (1) называется регулярным в точке z, если оно переводит некоторое регулярное семейство $C(z,\ k')$ в регулярное семейство $C(f(z),\ k'')$. Число $q(z)=\inf k'\,k''$, где нижняя грань берется по всевозможным регулярным семействам $C(z,\ k')$, называется характеристикой отображения (1).

Определение 3. Отображение (1) называется общим Q-квазиконформным отображением, если оно регулярно в каждой точке z круга $|z|<1$ и $\operatorname{vrai}\max q(z)\leqslant Q$.

Имеет место простое утверждение: если $L(z)$ — аффинное отображение с характеристикой $p(z)$ [1], то $p(z)=q(z)$, где $q(z)$ — характеристика отображения $L(z)$ в смысле определения 2.

Отображение, обратное к общему Q-квазиконформному отображению, есть также общее Q-квазиконформное отображение.

На общие Q-квазиконформные отображения распространяется теорема В. В. Степанова о дифференцируемости почти всюду [2], теорема Д. Е. Меньшова о N-свойстве на почти всех сечениях прямыми $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ [3] и леммы 1—4 М. А. Лаврентьева о $(p,\ 0)$-квазиконформных отображениях [1]. В частности, класс равностепенно непрерывен и модуль любого четырехугольника при отображении из класса увеличивается (уменьшается) не более чем в Q $(1/Q)$ раз.

Будем через $f(X)$ обозначать образ множества X при отображении (1) и через $|X|$ — внешнюю лебегову меру множества X. Введем функцию множества $\Phi(X)=|f(X)|$, определенную в круге $|z|\leqslant 1$. В силу гомеоморфности отображения (1) функция $\Phi(X)$ является аддитивной функцией множества на борелевских множествах круга $|z|\leqslant 1$; по теореме Лебега почти всюду существует обобщенная производная $D\Phi(z)$ (совпадающая в точках дифференцируемости отображения (1) с

обычным якобианом) и имеет место разложение Лебега

$$\Phi(X) = \Phi(X \cdot A_\infty) + \iint\limits_X D\Phi(z)\,dx\,dy,$$

где A_∞ можно считать множеством точек недифференцируемости отображения (1) (см. ([4]), стр. 174 и 227).

Теорема 1. *$\Phi(X)$ есть абсолютно непрерывная функция множества.*

Поскольку $f(A_\infty)$ есть множество, в котором обратная функция либо недифференцируема, либо дифференцируема с якобианом, равным нулю, то теорема 1 эквивалентна следующей теореме:

Теорема 1′. *Для всякого общего Q-квазиконформного отображения множество G точек дифференцируемости с якобианом, равным нулю, имеет меру, равную нулю.*

Доказательство. Предположим, что z_0 — точка плотности множества G и $\varepsilon > 0$. По теореме Фубини, можно подобрать малый квадрат T с центром в точке z_0 и стороной Δ, обладающий следующим свойством: существует на вертикальной стороне квадрата T измеримое множество E, $|E| > (1-\varepsilon)\Delta$, такое, что отрезок $E(y)$ прямой $y = \text{const}$, $y \in E$, принадлежащий квадрату T, разлагается в сумму $E(y) = P(y) + R(y)$, $P(y) \subset G$, $|R(y)| < \varepsilon\Delta$. Будем считать отображение (1) на сечениях $E(y)$ абсолютно непрерывным. Отобразим четырехугольник $f(T)$ конформно на прямоугольник $\overline{T}$ со стороной 1 в плоскости ω. Полученное отображение $\omega = \omega(z)$ квадрата T на прямоугольник $\overline{T}$ является общим Q-квазиконформным отображением, следовательно, площадь прямоугольника $\overline{T}$ не превосходит Q и расстояние между противоположными сторонами не меньше $1/Q$. Будем считать, что функция $w = f(z)$ с самого начала производит отображение T на $\overline{T}$. Оценим длину $\lambda(y)$ множества $f(E(y))$. Имеем:

$$\lambda^2(y) \leqslant \Big(\int\limits_{R(y)} \overline{\lim} \left|\frac{dw}{dx}\right| dx \Big)^2 \leqslant \varepsilon\Delta Q \int\limits_{R(y)} D\Phi(z)\,dx.$$

Интегрированием по множеству E получаем:

$$\int\limits_E \lambda^2(y)\,dy \leqslant \varepsilon\ \Delta\ Q \iint\limits_T D\Phi(z)\,dx\,dy \leqslant \varepsilon\,\Delta\,Q^2,$$

откуда следует, что существует значение y', $y' \in E$, для которого $\lambda^2(y) \leqslant \varepsilon\Delta Q^2/(1-\varepsilon)\Delta$, что невозможно.

Теорема 2. *Всякая последовательность $\{f_n(z)\}$ общих Q-квазиконформных отображений содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся к общему Q-квазиконформному отображению.*

Доказательство. В силу леммы М. А. Лаврентьева ((1), лемма 4), предельное отображение будет общим Q-квазиконформным с некоторой характеристикой $q(z)$. При этом всякий квадрат преобразуется в четырехугольник с модулем, не превышающим Q. Поскольку в окрестности точки аффинности z некоторый квадрат преобразуется в прямоугольник с модулем, равным $q(z)$, то $\operatorname{vrai\,max} q(z) \leqslant Q$.

Замечание. Так как $p(z) = q(z)$ почти всюду, то из теоремы об измеримости (B) частных производных чисел Дини ((4), стр. 253) следует измеримость функции $q(z)$.

Львовский государственный университет
им. И. Франко

Поступило
14 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Лаврентьев, Матем. сборн., **42**, № 4, 407 (1935). [2] В. В. Степанов, Math. Ann., **90**, 318 (1923). [3] Д. Е. Меньшов, Les conditions de monogénéité, Paris, 1936. [4] С. Сакс, Теория интеграла, М., 1949.