Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 2

МАТЕМАТИКА

Л. В. ОВСЯННИКОВ

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 14 I 1955)

В статье С. В. Валландера [1] обсуждается вопрос о приведении нелинейного уравнения с частными производными второго порядка для искомой функции $u(x, y)$ к линейному уравнению для новой искомой функции $v(x, y)$ при помощи подстановки вида

$$v = N(x, y, u).$$

Для формулировки условий возможности такого приведения в статье [1] используется предварительное преобразование исходного уравнения к каноническому виду и искомые условия получаются в терминах преобразованных уравнений отдельно для каждого типа. При вычислении подстановочной функции N выполняется квадратура от полного дифференциала с тремя переменными. Исчерпывающей характеристики множества получаемых линейных уравнений не дается.

Здесь покажем, что упомянутые условия легко получить в терминах исходного уравнения, независимо от его типа, и что для отыскания подстановки достаточно выполнить две простых квадратуры, а также охарактеризуем множество получаемых линейных уравнений, причем сделаем все это для любого числа независимых переменных.

Условимся обозначать нижними индексами частные производные по соответствующим переменным, а верхними — номера встречающихся величин.

Пусть u — функция независимых переменных x^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющая некоторому уравнению

$$F(u_{ij}, u_i, u, x^i) = 0, \tag{1}$$

которое преобразуется к новой функции v тех же переменных подстановкой вида

$$v = N(x^1, x^2, \ldots, x^n; u). \tag{2}$$

Легко устанавливается, что (1) может перейти в линейное уравнение для v

$$L(v) \equiv a^{ij} v_{ij} + 2b^i v_i + kv + l = 0 \quad (a^{ij} = a^{ji}) \tag{3}$$

только в том случае, когда (1) после разрешения относительно старших производных примет вид

$$a^{ij} u_{ij} + 2B^i u_i + C a^{ij} u_i u_j + D = 0, \tag{4}$$

где a^{ij} зависят только от x^i, а B^i, C, D — от x^i и u. (В уравнениях (3), (4) и далее используется тензорная запись суммы одночленов с повторяющимися индексами.)

Вопрос заключается в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия, наложенные на коэффициенты B^i, C, D, при которых существовала бы подстановка (2), переводящая (4) в (3).

Прямой подстановкой (2) в (3) сразу находятся следующие необходимые и достаточные условия совместности уравнений (2), (3) и (4):

1°. $N_{uu} = CN_u$.

2°. $a^{ij}(\log|N_u|)_j + b^i = B^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

3°. $L(N) = DN_u$.

Теорема. *Для того чтобы существовала подстановка* (2) *переводящая* (4) *в линейное уравнение для* v, *необходимо и достаточно выполнение равенств*

I. $a^{ij}C_j = B^i_u$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

II. $a^{ij}C_{ij} + 2B^iC_i = (D_u + CD)_u$.

Если эти условия выполнены, то искомая подстановка (2) *осуществляется любым нетривиальным решением уравнения* 1°.

Необходимость Дифференцируя 2° по u и используя 1°, получим I. Далее, пусть L' и L'' — линейные операторы, получающиеся из L (3) при условиях, соответственно, $l = 0$ и $k = l = 0$. Заметим, что для любых g, h

$$L'(gh) = hL'(g) + gL''(h) + 2a^{ij}g_ih_j. \tag{5}$$

Дифференцируя 3° один и два раза по u и учитывая 1°, получим

$$L'(N_u) = (D_u + CD)N_u; \tag{6}$$

$$L'(CN_u) = C(D_u + CD)N_u + (D_u + CD)_uN_u. \tag{7}$$

Применив в левой части (7) формулу (5) при $g = N_u$, $h = C$ и использовав (6), найдем

$$N_uL''(C) + 2a^{ij}N_{uj}C_i = (D_u + CD)_uN_u,$$

откуда, после деления на N_u, применения 2° и раскрытия оператора L'', получим II.

Достаточность. Пусть N^0 есть какое угодно частное решение уравнения 1° вида

$$N^0 = \int \exp\left(\int C\,du\right)du. \tag{8}$$

Из I и 1° следует, что функции

$$b^{0i} = B^i - a^{ij}(\log|N^0_u|)_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

не зависят от u. С этими b^{0i} построим линейный оператор $L^{0''}$. Имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}L^{0''}(N^0) = L^{0''}(CN^0_u). \tag{10}$$

По формуле (5) с $g = N^0_u$, $h = C$ находим

$$L^{0''}(CN^0_u) = CL^{0''}(N^0_u) + N^0_u[L^{0''}(C) + 2a^{ij}(\log|N^0_u|)_jC_i].$$

В силу (9) и II это преобразуется к виду

$$L^{0''}(CN^0_u) = CL^{0''}(N^0_u) + (D_u + CD)_uN^0_u. \tag{11}$$

Из (10) и (11) в силу 1° следует уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}[L^{0''}(N^0) - DN^0_u] = C\frac{\partial}{\partial u}[L^{0''}(N^0) - DN^0_u], \tag{12}$$

показывающее, что функция $L^{0''}(N^0) - DN^0_u$ отличается от N^0 самое большее множителем $-k^0$ и слагаемым $-l^0$, не зависящими от переменной u, так что

$$L^{0''}(N^0) - DN^0_u \equiv -k^0 N^0 - l^0,$$

откуда

$$L^0(N^0) \equiv L^{0''}(N^0) + k^0 N^0 + l^0 = DN^0_u. \tag{13}$$

В силу (8), (9) и (13) функция N^0 и линейное выражение L^0 удовлетворяют достаточным условиям 1°—3°, и теорема доказана.

Если вместо частного решения N^0 уравнения 1° взять его общее решение

$$N = pN^0 + q, \tag{14}$$

где p, q — произвольные функции x^i, то получатся все возможные линейные уравнения (3), к которым приводится заданное уравнение (4) при выполнении условий I, II. Легкие вычисления показывают, что коэффициенты b^i, k, l всего множества линейных уравнений (3) выражаются через входящие в (14) две произвольные функции p, q по формулам

$$b^i = b^{0i} - a^{ij}(\log|p|)_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$k = pL^{0\prime}\left(\frac{1}{p}\right), \tag{15}$$

$$l = p\left[l^0 - L^{0\prime}\left(\frac{q}{p}\right)\right].$$

В частности, для получения линейного однородного уравнения необходимо и достаточно связать p и q соотношением $q = rp$, где r — любое решение линейного уравнения

$$L^{0\prime}(r) = l^0. \tag{16}$$

Поступило
29 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. В. Валландер, Вестн. ЛГУ, № 5 (1954).