Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 2

МАТЕМАТИКА

В. Т. МИРОНОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РЯДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 III 1955)

В этой статье рассматриваются ряды $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Pi_n(z)$, где $\Pi_n(z) = \frac{(1-z/u)\dots(1-z/un^{1/q})}{(1-z/v)\dots(1-z/vn^{1/q})}$, $c_n = a_n\left(\frac{u}{v}\right)^n$, u, v, q — постоянные числа, причем $q > 0$, $u \neq v$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. Исследование касается вопросов сходимости и роста функций, представляемых указанными рядами. Следует отметить, что в настоящей статье обобщаются и дополняются результаты Р. Лагранжа (1).

Введем обозначения:

$$z = re^{\theta i},\ \arg u = \varphi,\ \arg v = \psi,\ |u| = p_1,\ |v| = p_2,\ (|\theta|, |\varphi|, |\psi| \leqslant \pi).$$

В целях сокращения записей будем наши ряды называть N_q-рядами. Чтобы N_q-ряд сходился в каждой точке $z = un^{1/q}$, предполагаем, что $(p_1/p_2)^q$ число иррациональное. Проведем оценку $|\Pi_n(z)|$:

$$\ln|\Pi_n(z)| = \sum_{k=1}^{n} \Phi\left(\frac{k}{n}\right), \qquad \Phi(x) = \ln\left|\frac{x^{1/q} - p_1^{-1}\tau e^{(\theta-\varphi)i}}{x^{1/q} - p_2^{-1}\tau e^{(\theta-\psi)i}}\right|, \qquad \tau = \frac{r}{n^{1/q}}. \quad (1)$$

Применяя метод, приведенный в (2), получим:

$$\int_0^1 \Phi(x)\,dx + \beta_n' < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi\left(\frac{k}{n}\right) < \int_0^1 \Phi(x)\,dx + \beta_n, \quad (2)$$

где β_n и β_n' при постоянных u, v и q зависят от n и z. Величина β_n в области $Q_v(|z - vn^{1/q}| \geqslant \sigma)$, где $\sigma > 0$, $n = 1, 2, \dots$, будет величиной $O(1/n)$, если $\tau \geqslant p + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ и p — наибольшее из чисел p_1, p_2), а также если z — фиксированное число, причем в этом последнем случае β_n будет величиной $O(1/n)$ равномерно относительно p_1 и p_2 при условии, что p_1 и p_2 больше какого-либо положительного числа δ. Если же $\tau < p + \varepsilon$, то β_n будет величиной $O(\ln(1+r)/n)$. Такими же свойствами обладает и величина β_n в области $Q_u(|z - un^{1/q}| \geqslant \sigma)$. Полагая $x = (\tau/t)^q$, получим:

$$n\int_0^1 \Phi(x)\,dx = r^q H_q(\theta, \tau), \quad H_q(\theta, \tau) = q\int_{\tau}^{+\infty} \ln\left|\frac{1 - t\,p_1^{-1}e^{(\theta-\varphi)i}}{1 - t\,p_2^{-1}e^{(\theta-\psi)i}}\right| \frac{dt}{t^{1+q}}. \quad (3)$$

Следовательно, в областях Q_v и Q_u можно написать, соответственно, неравенства:

$$|\Pi_n(z)| < e^{r^q (H_q(\theta,\tau) + \varepsilon_r)}, \quad |\Pi_n(z)| > e^{r^q (H_q(\theta,\tau) - \varepsilon_r)}, \quad \varepsilon_r > 0, \ \lim_{r\to\infty} \varepsilon_r = 0. \quad (4)$$

Воспользуемся преобразованием:

$$r^q H_q(\theta, \tau) = q \operatorname{Re} \left\{ \int_\tau^c \ln \left(1 - \frac{t}{p_1} e^{(\theta-\varphi)i}\right) \frac{dt}{t^{1+q}} - \right.$$

$$\left. - \int_\tau^c \ln \left(1 - \frac{t}{p_2} e^{(\theta-\psi)i}\right) \frac{dt}{t^{1+q}} + \int_c^{+\infty} \ln \left| \frac{1 - p_1^{-1} t e^{(\theta-\varphi)i}}{1 - p_2^{-1} t e^{(\theta-\psi)i}} \right| \frac{dt}{t^{1+q}} \right\}, \qquad (5)$$

где положительное число c меньше p_1 и p_2.

Если z — фиксированное число, то при достаточно большом n будет выполняться неравенство $\tau < c$. Тогда, разлагая в ряд Тейлора подинтегральные функции в первых двух интегралах (5), найдем:

$$r^q H_q(\theta, \tau) = \begin{cases} -\ln n^{\frac{1}{q} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{u^q} - \frac{1}{v^q}\right) z^q} - \sum_{m=1}^{q-1} \frac{qn^{\frac{q-m}{q}}}{m(q-m)} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{u^m} - \frac{1}{v^m}\right) z^m + \\ \qquad + O(1), \text{ если } q \text{ целое число;} \\ - \sum_{m=1}^{[q]} \frac{qn^{\frac{q-m}{q}}}{m(q-m)} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{u_m} - \frac{1}{v^m}\right) z^m + O(1), \\ \qquad \text{если } q \text{ не целое число.} \end{cases} \qquad (6)$$

Возьмем на пересечении областей Q_v, Q_u число z_0. Полагая $\Pi_n(z) / \Pi_n(z_0) = P_n(z)$ и применяя формулу Абеля, найдем:

$$\left| \sum_n^m c_s \Pi_s(z) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=n}^{m-1} \left| P_s(z) - P_{s+1}(z) \right| \left| \sum_{\nu=n}^{s} c_\nu \Pi_\nu(z_0) \right| + \left| P_m(z) \right| \left| \sum_{\nu=n}^{m} c_\nu \Pi_\nu(z_0) \right|, \qquad (7)$$

где

$$P_s(z) - P_{s+1}(z) = \frac{\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0) P_s(z)}{\left[1 - \frac{z_0}{u}(1+s)^{-1/q}\right]\left[1 - \frac{z}{v}\left(1 + s\right)^{-1/q}\right](1+s)^{1/q)}}.$$

Из (6) и (7) немедленно вытекают следующие теоремы.

1. *Если N_q-ряд при $q < 1$ сходится в точке $z_0 \neq un^{1/q}$, то он сходится во всей плоскости, за исключением точек $\{vn^{1/q}\}$, причем сходится равномерно в любой ограниченной области $Q' \subset Q_v$.*

2. *Если N_q-ряд при $q < 1$ сходится абсолютно в точке $z_0 \neq un^{1/q}$, то он сходится абсолютно во всей плоскости, за исключением точек $\{vn^{1/q}\}$.*

3. *Если N_q-ряд при $q \geqslant 1$ сходится в точке $z_0 \neq un^{1/q}$, то он сходится в полуплоскости $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0) > 0$, за исключением точек $\{vn^{1/q}\}$, причем сходится равномерно в любой ограниченной области Q', лежащей на пересечении Q_v с полуплоскостью $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0) > 0$.*

4. *Если N_q-ряд, в котором q — нецелое число большее единицы, сходится в точке $z_0 \neq un^{1/q}$, то он сходится и в тех точках прямой $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0) = 0$, в которых первая из не обратившихся в*

нуль функций $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u^m}-\frac{1}{v^m}\right)(z^m-z_0{}^m)$, *где* $m=1, 2, \ldots, [q]$, *имеет положительный знак, точки* $\{vn^{1/q}\}$ *исключаются.*

5. *Если при* q *целом* N_q*-ряд сходится в точке* $z_0 \neq un^{1/q}$, *то он сходится и в тех точках прямой* $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-z_0)=0$, *в которых первая из функций* $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u^m}-\frac{1}{v^m}\right)(z^m-z_0^m)$, $m=1, 2, \ldots, (q-1)$, *не обратившихся в нуль, будет иметь положительный знак, а также и в тех точках той же прямой, в которых при* $m=2, 3, \ldots, (q-1)$ *функция* $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u^m}-\frac{1}{v^m}\right)(z^m-z_0{}^m)=0$, *но функция* $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u^q}-\frac{1}{v^q}\right)(z^q-z_0{}^q)>q-1$, *причем точки* $\{vn^{1/q}\}$ *исключаются.*

6. *Если* N_q*-ряд при* $q>1$ *сходится в точке* $z_0 \neq un^{1/q}$, *то он сходится абсолютно в полуплоскости* $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-z_0)>0$, *за исключением точек* $\{vn^{1/q}\}$.

7. *Если* N_1*-ряд сходится абсолютно в точке* $z_0 \neq un^{1/q}$, *то он сходится абсолютно в полуплоскости* $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-z_0)>1$, *за исключением точек* $\{vn^{1/q}\}$.

8. *Всякий* N_q*-ряд при* $q \geqslant 1$ *имеет полуплоскость сходимости* $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)z>\lambda$.

9. *Всякий сходящийся* N_q*-ряд при* $q \geqslant 1$ *имеет полуплоскость абсолютной сходимости* $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)z>\lambda_a$.

10. *Если* $q<1$, *то* $\lambda_a-\lambda \leqslant 1$, *если же* $q>1$, *то* $\lambda_a=\lambda$.

11. *Сумма* N_q*-ряда является мероморфной функцией в полуплоскости сходимости, причем оно может иметь только простые полюсы в точках* $\{vn^{1/q}\}$.

Перейдем к оценке суммы $S(z)$ сходящегося ряда. Если N_q-ряд сходится во всей плоскости или если $q \geqslant 1$ и $\lambda<0$, то для оценки $|S(z)|$ можно воспользоваться формулой (7), положив в ней $n=0$. Из этой формулы видно, что дело сводится к оценке $|\Pi_n(z)|$. Исследуя на экстремальные значения функцию (3), легко найти, когда $H_q(\theta, \tau)$ при данном θ будет иметь наибольшее значение, которое мы обозначим через $H_q(\theta)$.

I. $0<q<1$.

$$\text{а) } p_2>p_1,\ H_q(\theta)=\begin{cases}H_q(\theta,0), & \text{если } A(\theta)>0;\\ H_q(\theta,t^*), & \text{если } A(\theta)\leqslant 0;\end{cases}$$

$$\text{б) } p_1 \geqslant p_2,\ H_q(\theta)=\begin{cases}0, & \text{если } A(\theta)\leqslant 0;\\ H_q(\theta,0), & \text{если } A(\theta)>0,\ H_q(\theta,0)\geqslant 0;\\ 0, & \text{если } A(\theta)>0,\ H_q(\theta,0)<0;\end{cases}$$

$$t^*=\frac{2p_1p_2}{p_1^2-p_2^2}A(\theta),\quad A(\theta)=p_1\cos(\theta-\psi)-p_2\cos(\theta-\varphi)$$

II. $q \geqslant 1$.

$$\text{а) } p_2>p_1,\ H_q(\theta)=\begin{cases}+\infty, & \text{если } A(\theta)>0;\\ H_q(\theta,t^*), & \text{если } A(\theta)\leqslant 0;\end{cases}$$

$$\text{б) } p_1 \geqslant p_2,\ H_q(\theta)=\begin{cases}+\infty, & \text{если } A(\theta)>0;\\ 0, & \text{если } A(\theta)\leqslant 0.\end{cases}$$

На основании формул (4), (6), (7), (8) приходим к теореме:

12. *Если* $q<1$ *или* $q\geqslant 1$ *и* $\lambda=-\infty$, *то сумма сходящегося* N_q*-ряда на пересечении области его сходимости с областью* Q_v *удовлетворяет неравенству*

$$|S(z)|<e^{r^q[H_q(\theta)+\varepsilon]},$$

где $\varepsilon>0$ *и* r *достаточно большое число.*

Если $q\geqslant 1$ и $\lambda>-\infty$, то другим путем для $|S(z)|$ можно получить лучшую оценку, чем в теореме 12. За недостатком места приведем лишь окончательные результаты в виде теоремы 13; отметим, что оценка производилась в полуплоскости $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-h)\geqslant 0$, лежащей в полуплоскости сходимости ряда, и полагалось $z=h+\rho e^{(\omega+\alpha)i}$, где $|\omega|\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\alpha=-\arg\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)$.

13. *Если* N_q*-ряд при* $q\geqslant 1$ *сходится в полуплоскости* $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)z>\lambda$, *где* $\lambda>-\infty$, *то на пересечении полуплоскости* $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-h)\geqslant 0$ *с областью* Q_v *сумма ряда удовлетворяет неравенствам:*

а) $p_2>p_1$.

1) $$|S(z)|<Ce^{\rho^q H_q(\omega+\alpha,\,\tau^*)}+\frac{\rho^{2q-2}(\tau^*)^{q-1}}{(1+\rho\tau^*)^{q-1}}H_q^{(1)}(\omega+\alpha,\tau^*)\left(1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right),$$

если $q>1$.

2) $$|S(z)|<Ce^{\rho H_1(\omega+\alpha,\,\tau^*)}\ (1+\rho)^{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)h+2}$$

если $q=1$,

причем

$$\tau^*=\frac{2p_1p_2}{p_1^2-p_2^2}A(\omega+\alpha),$$

$$H_q^{(1)}=q\operatorname{Re}\int_{\tau_1^*}^{+\infty}\left[\frac{he^{(\omega+\alpha)i}}{u^2-ute^{(\omega+\alpha)i}}-\frac{he^{(\omega+\alpha)i}}{v^2-vte^{(\omega+\alpha)i}}\right]\frac{dt}{t^{q-1}}.$$

б) $p_1>p_2$, $|S(z)|<C(1+\rho)$.

в) $p_1=p_2=p$.

1) $|S(z)|<e^{C\zeta^{q-1}(\rho,\,\omega)(1+\gamma_\rho)}$, *где* $\zeta(\rho,\omega)=\rho/\sqrt{1+\rho\cos\omega}$, *если* $q>1$ *и* $\lambda\geqslant 0$ ($\gamma_\rho\to 0$ *при* $\rho\to\infty$).

2) $$|S(z)|<C\frac{\rho^{\lambda+1+\varepsilon}}{\sqrt{(1+\rho\cos\omega)^\lambda}},$$ *если* $q=1$ *и* $\lambda\geqslant 0$.

3) $|S(z)|<C(1+\rho)$, *если* $q\geqslant 1$ *и* $\lambda\geqslant 0$.

Во всех случаях C обозначает постоянное положительное число.

Саратовский государственный
педагогический институт

Поступило
23 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Lagrange, Acta Math., **64** (1935). [2] Г. Полия, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. I, отд. II, №№ 8, 9, 20, 1937. [3] В. Л. Гончаров, Усп. матем. наук, **3**, 113 (1937).