Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 2

МАТЕМАТИКА

Ю. Т. МЕДВЕДЕВ

О НЕИЗОМОРФНЫХ РЕКУРСИВНО-ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 I 1955)

Введение. Если общерекурсивная функция

$$m = f(n)$$

отображает натуральный ряд $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ взаимно-однозначно на себя, то обратная функция

$$n = f^{-1}(m)$$

является, как легко показать, тоже общерекурсивной. Такого рода отображения доставляют естественное средство для изучения рекурсивных свойств подмножеств ряда N. Будем их называть R-отображениями. Два множества $E' \subseteq N$ и $E'' \subseteq N$ будем называть изоморфными или R-эквивалентными (А. Н. Колмогоров), если существует R-отображение, переводящее E' точно в E''. Отношение изоморфизма транзитивно, рефлексивно и, в силу сделанного выше замечания, симметрично. Из определения вытекают также следующие простые теоремы:

1) Множества E' и E'' изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их дополнения $\overline{E'}$ и $\overline{E''}$.

2) Рекурсивные множества (для краткости будем называть рекурсивные множества B-множествами) E' и E'' изоморфны тогда и только тогда, когда E' с E'', так же как и $\overline{E'}$ с $\overline{E''}$, имеют одинаковые мощности.

В литературе описано несколько рекурсивно-перечислимых множеств («A-множеств»), попарный неизоморфизм которых устанавливается непосредственно и которые не являются B-множествами. Важные примеры содержит работа Поста ([1]). Вопрос о том, сколь богатым может быть класс попарно неизоморфных A-множеств, не являющихся B-множествами, составляет предмет настоящей работы.

§ 1. В статье ([1]) Пост строит, в частности, так называемое гиперпростое множество.

Определение (Пост). A-множество H называется гиперпростым, если его дополнение $\overline{H}$ бесконечно и не существует рекурсивно-перечислимой последовательности $\lambda = \{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ кортежей $\lambda_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)})$ (x — натуральные числа) со следующими свойствами: а) при $n \neq m$ конечные множества, образованные, соответственно, компонентами кортежей λ_m и λ_n, не пересекаются; б) каждое из таких конечных множеств пересекается с $\overline{H}$.

При этом последовательность λ называется рекурсивно-перечислимой, если существуют такие общерекурсивные функции $\rho(n)$ и $l(n, m)$, что

$$\rho(n) = k_n, \quad l(n, m) = x_m^{(n}$$

всякий раз, когда $m = 1, 2, \ldots, k_n$ и $n = 1, 2, \ldots$

Для дальнейшего полезно одно обозначение. Будем под $E(n)$ понимать число точек множества $E \subseteq N$ на отрезке $[1, n]$. Оказывается, что верна следующая теорема:

Теорема 1. *Для того чтобы A-множество H с бесконечным дополнением $\bar{H}$ было гиперпростым, необходимо и достаточно, чтобы не существовало такой общерекурсивной функции φ, что*

$$\bar{H}(\varphi(n)) \geqslant n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Доказательство. Допустим, что H гиперпростое. Если бы для некоторой общерекурсивной функции φ выполнялось условие (1), то рекурсивно-перечислимая последовательность кортежей

$$\lambda_n = (i_n, i_n + 1, i_n + 2, \ldots, i_{n+1} - 1),$$

где $i_1 = 1$, $i_{n+1} = \varphi(i_n + 1)$, удовлетворяла бы условиям а) и б) определения Поста. Обратно, предположим, что для некоторой рекурсивно-перечислимой последовательности кортежей λ условия а) и б) выполнены. Тогда в качестве $\varphi(n)$ можно взять наибольшую из компонент кортежей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Найденное характеристическое свойство гиперпростых множеств подсказывает введение следующих определений.

Определение 1. Множество $E'' \subseteq N$ не менее густо, чем множество $E' \subseteq N$, если существует такая общерекурсивная функция θ, что

$$E''(\theta(n)) \geqslant E'(n) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Записываем это так:

$$E' \underline{\prec} E''.$$

Определение 2. Множества E' и E'' имеют одинаковую густоту, если $E' \underline{\prec} E''$ и $E'' \underline{\prec} E'$. Множество E'' гуще множества E', если $E' \underline{\prec} E''$ и неверно, что $E'' \underline{\prec} E'$. В последнем случае пишем:

$$E' \prec E''.$$

Теперь можно сказать, что гиперпростыми являются те и только те A-множества H с бесконечными дополнениями $\bar{H}$, для которых $\bar{H} \prec N$.

Отношение $\underline{\prec}$ рефлексивно и транзитивно; отношение $\prec$ транзитивно, но не рефлексивно.

Изоморфные множества имеют одинаковую густоту. Нетрудно доказать и более общее утверждение. Пост называет проблему разрешимости множества E' однозначно сводимой к проблеме разрешимости множества E'', если существует такая общерекурсивная функция $f(n)$, что $n \in E'$ тогда и только тогда, когда $f(n) \in E''$, причем $f(n) \neq f(m)$ при $n \neq m$.

Теорема 2. *Если проблема разрешимости множества E' однозначно сводима к проблеме разрешимости множества E'', то $E' \underline{\prec} E''$.*

§ 2. Теорема 3. *Пусть* $E'' \subseteq N$ *и* $E' = \overline{H}$, *где* $H \subseteq N$ — *гиперпростое множество. Пусть, далее, существует такая общерекурсивная функция* θ, *для которой*

$$E''(\theta(n)) > E'(n) \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2^*)$$

Тогда

$$E' \rightarrow E''.$$

Доказательство. Из (2*) следует (2), откуда, по определению 1, $E' \underline{\rightarrow} E''$. Покажем, что соотношение $E'' \underline{\rightarrow} E'$ не может иметь места. В самом деле, выполнение этого соотношения равносильно существованию такой общерекурсивной функции $\psi(n)$, что $E'(\psi(n)) \geqslant E''(n)$ при всех натуральных n. Функция φ, задаваемая схемой

$$\varphi(1) = \theta(\psi(1)), \quad \varphi(n+1) = \theta(\psi(\varphi(n))),$$

общерекурсивна и, как легко видеть,

$$E'(\varphi(n)) = \overline{H}(\varphi(n)) \geqslant n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

По теореме 1, множество H не может тогда быть гиперпростым. Итак, остается принять, что $E' \rightarrow E''$.

Теорема 3 дает способ построения последовательности типа ω все более густых гиперпростых дополнений. В самом деле, гиперпростые множества существуют. Взяв какое-либо одно из них, скажем H_0, и последовательно удаляя из него по одной точке, получим гиперпростые множества H_0, H_1, $H_2, \ldots$ и соответствующие дополнения

$$\overline{H}_0 \rightarrow \overline{H}_1 \rightarrow \overline{H}_2 \rightarrow \ldots$$

Отметим, что аналогично, добавляя к H_0 одну за одной точки из $\overline{H}_0$, можно получить последовательность

$$\ldots \rightarrow \overline{H}^{(n)} \rightarrow \overline{H}^{(n-1)} \rightarrow \ldots \rightarrow \overline{H}^{(2)} \rightarrow \overline{H}^{(1)} \rightarrow \overline{H}_0$$

типа ω^* ($H^{(i)}$ — гиперпростые множества). К сожалению, эта последовательность, в отличие от первой, получается неэффективно.

§ 3. Теория конструктивных трансфинитов, созданная Черчем и Клином ([2], [3]), дает возможность получения существенно более полного, чем в предыдущем пункте, результата. Приведем здесь удобства ради соответствующие понятия.

Трансфинитное число α называется конструктивным, если можно найти взаимно-однозначное отображение множества всех трансфинитов, не превосходящих α, на часть S_α натурального ряда N, удовлетворяющее следующему требованию: существуют такие частично рекурсивные функции $M(x)$, $P(x)$, $Q(x, n)$, что: 1) если β_x — трансфинит, сопоставленный числу $x \in S_\alpha$ (говорят, что x есть обозначение для β_x), то $M(x)$ равно одному из чисел 1, 2, 3 в зависимости от того, является ли β_x нулем, числом первого рода или второго; 2) если x есть обозначение числа β_x первого рода, то $P(x)$ обозначает $\beta_x - 1$; 3) если x обозначает число β_x второго рода, то числа $Q(x, 1)$, $Q(x, 2), \ldots$ обозначают возрастающую последовательность трансфинитов, сходящуюся к β_x.

Сформулируем теперь основную теорему, дающую представление о запасе неизоморфных гиперпростых (а значит, не являющихся B-множествами) множеств.

Теорема 4. *Для любого конструктивного трансфинита α существует последовательность типа α все более густых гиперпростых дополнений:*

$$\overline{H}_0 \rightarrow \overline{H}_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \overline{H}_\beta \rightarrow \ldots$$

При доказательстве используются две леммы. Обозначим через K класс тех общерекурсивных функций $\varphi(x)$, для которых $\varphi(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ и разность $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ не убывает.

Лемма 1. *Существует такая пара частично рекурсивных функций A и B, что в случае, когда n есть геделев номер функции $\varphi \in K$, $A(n)$ является номером некоторого гиперпростого множества H, а $B(n)$ — номером некоторой общерекурсивной функции ψ, причем*

$$\overline{H}(\psi(t)) = \varphi(\overline{H}_0(t)),$$

где H_0 — какое-либо фиксированное гиперпростое множество.

Лемма 2. *Если α — конструктивный трансфинит, S_α — соответствующая система обозначений, то существует частично-рекурсивная функция $C(x)$ со следующим свойством: если $x \in S_\alpha$, то $C(x)$ дает номер некоторой функции $\varphi_x(m) \in K$, причем для всяких трансфинитов $\beta_x < \alpha$ и $\beta_y \leqslant \alpha$, $\beta_x < \beta_y$ выполняется соотношение $\varphi_x(m) < \varphi_y(m)$ при достаточно больших m.*

Остается невыясненным, можно ли получить предложение, аналогичное теореме 4, но для последовательности все менее густых гиперпростых дополнений. Из числа других вопросов, оставшихся открытыми, отметим следующий: существует ли для всякой пары гиперпростых дополнений, из которых одно гуще другого, некоторое третье, промежуточное по густоте?

Поводом к написанию настоящей работы послужила задача, поставленная А. Н. Колмогоровым на семинаре по рекурсивной арифметике в Московском государственном университете: сколько может существовать попарно неизоморфных (нерекурсивных) A-множеств?

Считаю своим долгом поблагодарить А. Н. Колмогорова также за ряд ценных замечаний.

Поступило
13 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Post, Bull. Am. Math. Soc., 50, 284 (1944). [2] A. Church, Bull. Am. Math. Soc., 44, 224 (1938). [3] S. C. Kleene, J. Simb. Logic, 3, 41 (1943).