Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 2

МАТЕМАТИКА

О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

О РЕШЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 I 1955)

В заметке ([1]) мы предложили новый способ доказательства разрешимости краевых задач для линейных уравнений и систем гиперболического и параболического типов и указали, что этот метод применим и для решения определенных типов операторных уравнений. Приведем здесь некоторые их этих операторных уравнений.

Пусть H — полное сепарабельное гильбертово пространство, $\|\ \|$ — норма в нем. Рассмотрим на отрезке $0 \leqslant t \leqslant l$ совокупность всех непрерывных функций $u(t)$, значения которых суть элементы H, и введем скалярное произведение

$$(u, v)_1 = \int_0^l (u(t),\ v(t))\, dt,$$

где (u, v) — скалярное произведение в H. Обозначим через H_1 гильбертово пространство, полученное замыканием этой совокупности по введенному скалярному произведению. Будем говорить, что функция $u(t)$ имеет производную по t, если

$$u(t) = u(0) + \int_0^t v(\tau)\, d\tau,$$

где $v(\tau) \in H_1$, и будем писать $u_t = v$.

§ 1. Рассмотрим уравнение

$$Su \equiv u_t + S_1 u + S_2 u = f \tag{1}$$

при условии

$$u(0) = \varphi_0. \tag{2}$$

Здесь $S_1(t)$ и $S_2(t)$ — два семейства линейных операторов в H, относительно которых предполагается следующее:

I. Область определения $D(S_1)$ оператора S_1 плотна в H и не зависит от t и $D(S_1) \subset D(S_2)$. Оператор S_1 — самосопряженный и положительно-определенный. Он устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $D(S_1)$ и всем H. Оператор S_2 подчинен S_1, т. е. существуют такие положительные постоянные C_1 и достаточно малая δ $(\delta \leqslant 1/7)$, что

$$\|S_2 u\|^2 \leqslant \delta \|S_1 u\|^2 + c_1 (S_1 u, u). \tag{3}$$

II. Операторы $S_k(t)$ как функции t таковы, что: а) для любого $x \in H$ функции $y_k(t_1, t_2) = S_k(t_1) S_1^{-1}(t_2) x$ измеримы по t_1 и по t_2; б) $S_k(t)$ сильно дифференцируемы по t, т. е. для любого $x \in D(S_1)$ функции $y_k(t) = S_k(t) x$ сильно дифференцируемы по t.

III. Если операторы S_{kt} определим равенствами

$$\frac{d}{dt}(S_k(t)\, x) = S_{kt}(t) x,$$

то операторы $S_1(t_1)S_1^{-1}(t_2)$, $S_{kt}S_1^{-1}$ $(k=1, 2)$ ограничены и их нормы не зависят от t_k.

Введем в совокупность элементов $D(S_1^{1/2})$, где $S_1^{1/2}$ — положительный корень из S_1, скалярное произведение

$$(x, y)_2 = (S_1^{1/2}(0)\,x,\ \ S_1^{1/2}(0)\,y)$$

и сохраним за так образованным гильбертовым пространством то же обозначение $D(S_1^{1/2})$.

Определим на всех элементах $u(t)$ пространства H_1, имеющих производную u_t и принадлежащих вместе с u_t линейному множеству $D(S_1)$, оператор A при помощи равенства

$$Au = (Su;\ u(0)).$$

Область значений $R(A)$ этого оператора образует линейное множество в гильбертовом пространстве $W = H_1 \times D(S_1^{1/2})$.

Лемма 1. *В W нет элемента, кроме* (0; 0), *ортогонального к* $R(A)$.

Доказательство. Пусть существует в W элемент $(v; \psi)$, ортогональный ко всем $u \in R(A)$, т. е.

$$\int_0^l (v, Su)\,dt + (S_1^{1/2}\psi,\ S_1^{1/2}u)_{t=0} = 0. \tag{4}$$

Построим по $v(t)$ элемент $\varphi(t)$ как решение уравнения

$$S_1(t)\varphi(t) = \int_l^t v(\tau)\,d\tau.$$

Элемент

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant a, \\ \int\limits_a^t \varphi(\tau)\,d\tau, & a \leqslant t \leqslant l, \end{cases}$$

при всех t принадлежит $D(S_1)$, имеет производную u_t, причем $u_t \in D(S_1)$ для всех $t \neq a$, так что $u \in D(A)$.

Подставим его в (4):

$$0 = \int_a^l \left([S_1\varphi]_t,\ \varphi + S_1\left[\int_a^t \varphi\,d\tau\right] + S_2\left[\int_a^t \varphi\,d\tau\right]\right) dt =$$

$$= \int_a^l \left\{ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(S_1\varphi,\ \varphi) + \frac{1}{2}(S_{1t}\varphi, \varphi) - (S_1\varphi, S_1\varphi) - \right.$$

$$\left. - \left(S_1\varphi,\ S_{1t}\left[\int_a^t \varphi\,d\tau\right] + S_2\varphi + S_{2t}\left[\int_a^t \varphi\,d\tau\right]\right)\right\} dt.$$

Используя перечисленные выше свойства S_k и то, что $\varphi(l) = 0$, из этого равенства получим неравенство

$$(S_1\varphi, \varphi)_{t=a} + \int_a^l \| S_1\varphi \|^2\,dt \leqslant c_2 \int_a^l (S_1\varphi, \varphi)\,dt, \tag{5}$$

справедливое для всех $a \in [l-b, l]$, где c_2 и $b > 0$ — некоторые постоянные, зависящие лишь от норм операторов, входящих в условие III. Из (5) уже легко заключить, что $\varphi = 0$ для $t \in [l-b, l]$. Затем аналогично докажем, что $\varphi = 0$ для $t \in [l-kb, l-(k-1)b]$, $k = 1, 2, \ldots$ Отсюда следует, что $v = 0$. А тогда из (4) получим, что и $\psi = 0$.

Лемма 2. *Для всех $u(t) \in D(A)$ справедливо неравенство*

$$\int_0^{t_1} \{\| u_t \|^2 + \| S_1 u \|^2\}\, dt + (S_1^{1/2} u,\ S_1^{1/2} u)_{t=t_1} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \left\{ \int_0^{t_1} \| Su \|^2\, dt + (S_1^{1/2} u,\ S_1^{1/2} u)_{t=0} \right\}, \tag{6}$$

где c_3 зависит лишь от c_1, δ и $\| S_{1t} S_1^{-1} \|$.

Теорема 1. *Оператор A допускает замыкание $\overline{A}$, причем $R(\overline{A}) = \overline{R}(A) = W$. Уравнение*

$$\overline{A} u = (f;\ \varphi_0) \tag{7}$$

однозначно разрешимо для любых $f \in H_1$ и $\varphi_0 \in D(S_1^{1/2})$. Элементы $v \in D(\overline{A})$ имеют производную $v_t \in H_1$, $v \in D(S_1^{1/2})$ при всех t, $v \in D(S_1)$ для почти всех t и $S_1 u \in H_1$, так что $\overline{A} u = (Su;\ u(0))$.

Утверждения теоремы следуют из лемм 1 и 2.

Замечания. 1. Если снять условия дифференцируемости $S_k(t)$ по t и потребовать, чтобы $|(S_2 u, u)| \leqslant q(S_1 u, u) + c_4 (u, u)$, где $q < 1$, то, исходя из результатов § 1, можно доказать для любых $f \in H_1$ и $\varphi_0 \in H$ существование следующего обобщенного решения: $u(t) \in H$ для всех t, $u(t) \in D(S_1^{1/2})$ для почти всех t, причем $S_1^{1/2} u \in H_1$; наконец, $u(t)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l \{(u, \Phi_t - S_1^* \Phi) - (S_1^{1/2} u,\ S_1^{1/2} \Phi) + (f, \Phi)\}\, dt + (\varphi, \Phi)_{t=0} = 0$$

для любой функции $\Phi(t) \in D(A)$ и $\Phi(l) = 0$.

2. Методом, аналогичным изложенному выше, доказывается разрешимость операторного уравнения

$$Su \equiv u_t + S_1 u + B S_1 u + S_2 u = f,$$

где $B(t)$ — ограниченный кососимметрический оператор.

§ 2. Переходим к операторным уравнениям вида

$$Su = u_{tt} + S_1 u + S_2 u = f \tag{8}$$

с условиями

$$u(0) = \varphi_0, \quad u_t(0) = \varphi_1. \tag{9}$$

Сначала рассматриваются уравнения вида (8), для которых операторы $S_k(t)$ удовлетворяют перечисленным в § 1 условиям, $S_2 S_1^{-1/2}$ и $S_{ktt} S_1^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ограничены и

$$|(S_{1t} u, u)| \leqslant c_4 (S_1 u, u).$$

Для них устанавливается аналог леммы 1, где оператор

$$Au = (Su;\ u(0);\ u_t(0))$$

определяется на всех u, имеющих производные u_t и u_{tt}, причем u, u_t и u_{tt} принадлежат $D(S_1)$ (u и u_t для всех, а u_{tt} — для почти всех t), а пространство $W = H_1 \times D(S_1^{1/2}) \times H$. Именно:

Лемма 1′. *Множество $R(A)$ плотно в W.*

Далее, имеет место

Лемма 2′. *Для элементов $u \in D(A)$ справедливо «энергетическое» неравенство*

$$\{\| u_t \|^2 + \| S_1^{1/2} u \|^2\}_{t=t_1} \leqslant c_5 \{\| u_t \|^2 + \| S_1^{1/2} u \|^2\}_{t=0} + c_5 \int_0^{t_1} \| Su \|^2\, dt, \tag{10}$$

причем c_5 зависит лишь от c_4 и нормы оператора $S_2 S_1^{-1/2}$.

Теорема 1′. *Оператор A допускает замыкание, причем $R(\overline{A}) = \overline{R}(A) = W$, и на W существует $\overline{A}^{-1}$.*

Таким образом, уравнение

$$\overline{A}u = (f; \varphi_0; \varphi_1)$$

имеет единственное решение для любого элемента $(f; \varphi_0; \varphi_1) \in W$. Это решение является обобщенным в смысле введенного нами (2) определения.

Замечания. 1. Теорема существования для (8), (9) справедлива при выполнении лишь тех ограничений на S_k, которые использованы при выводе неравенства (10).

2. Аналогичным приемом исследуется разрешимость уравнения

$$Su \equiv u_{tt} + S_1 u + BS_1 u + S_2 u = f$$

при условиях (9), где $B(t)$ — ограниченный, кососимметрический оператор.

§ 3. Рассмотрим, наконец, уравнение типа Шредингера

$$Su \equiv u_t - iS_1 u = f$$

при условии $u(0) = \varphi_0$. Пространство H будем считать в этом случае комплексным. Оператор $S_1(t)$ подчиним сначала тем же условиям, что и в § 1. Тогда, аналогично изложенному в § 1, установим, что имеет место лемма 1. Вместо неравенства (6) леммы 2 для всех $u \in D(A)$ имеет место неравенство

$$(u, u)_{t=t_1} \leqslant e^{t_1}\left[(u, u)_{t=0} + \int_0^{t_1} \|f\|^2 dt\right],$$

а вместо теоремы 1 — теорема 1″.

Теорема 1″. *Рассматриваемая задача при любых $f \in H_1$ и $\varphi_0 \in H$ имеет следующее обобщенное решение: $u(t) \in H$ при всех t и удовлетворяет тождеству*

$$\int_0^l \{(u, \Phi_t - iS_1\Phi) + (f, \Phi)\}\, dt + (\varphi, \Phi)_{t=0} = 0$$

при любой $\Phi \in D(A)$ и $\Phi(l) = 0$.

Исходя из этой теоремы, можно затем доказать, что теорема существования такого обобщенного решения остается справедливой, если отбросить требование дифференцируемости $S_1(t)$ по t. Наконец, нетрудно доказать, что к решению задачи будут сходиться в H_1 при $\Delta t \to 0$ функции

$$u(t_k + \Delta t) = \left(E - i\frac{\Delta t}{2} S_1(t_k)\right)^{-1}\left(E + i\frac{\Delta t}{2} S_1(t_k)\right) u(t_k),$$

$u(0) = \varphi_0$, где $t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, \ldots$ Этот способ вычисления приближенных решений был указан И. М. Гельфандом на его семинаре.

§ 4. Для приближенного вычисления решений рассмотренных выше задач и исследования их дифференциальных свойств применим метод, данный нами в заметке (3).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
4 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Ладыженская, ДАН, **97**, № 3 (1954). [2] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, 1953. [3] О. А. Ладыженская, ДАН, **102**, № 1 (1955).