Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 2

МАТЕМАТИКА

М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 10 I 1955)

Рассмотрим последовательность гармонических функций $u_n(x, y)$, заданных в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$ и удовлетворяющих следующим условиям: 1) $u_n(x, 0) = 0$; 2) $u_n(k\pi, y) = 0$; 3) $u_n(x + 2k\pi, y) = u_n(x, y)$; $u_n(-x, y) = u_n(x, y)$; 4) $\frac{\partial}{\partial y} u_n(x, 0) = \varphi_n(x)$; 5) последовательность функций $\varphi_n(x)$ при $n \to \infty$ равномерно сходится к функции $\varphi(x)$, т. е. $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \alpha_n$, где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$; 6) $\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0)$, где $u(x, y)$ — функция, гармоническая в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $u(x, 0) = 0$; 7) $u(x + 2k\pi, y) = u(x, y)$; $u(-x, y) = u(x, y)$; $u(k\pi, y) = 0$; 8) функция $u(x, y)$ ограничена в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$, т. е. $|u(x, y)| < M$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$. Вследствие некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа из приведенных выше условий не будет следовать сходимость последовательности функций $u_n(x, y)$ к функции $u(x, y)$.

Рассмотрим последовательность функций $w_n(x, y)$, удовлетворяющих условиям 1)—4) и являющихся решением уравнения

$$-\varepsilon_n \frac{\partial^{2m} w_n}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}. \tag{1}$$

Покажем, что при некотором подборе чисел ε_n последовательность функций $w_n(x, y)$ будет сходиться к функции $u(x, y)$.

Пусть $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} \sin kx$; $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$. Обозначим через $\tilde{w}_n(x, y)$ последовательность функций, для которых выполнены условия 1)—3), а вместо условия 4) выполнено условие $\tilde{w}_n(x, 0) = \varphi(x)$. Легко видеть, что

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin kx \operatorname{sh} ky, \quad \tilde{w}_n(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\xi_{kn}} \sin kx \operatorname{sh} \xi_{kn} y,$$

$$w_n(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{kn}}{\xi_{kn}} \sin kx \operatorname{sh} \xi_{kn} y, \quad \text{где } \xi_{kn} = k\sqrt{1 - \varepsilon_n k^{2m-2}}. \tag{2}$$

Сначала оценим разность $\tilde{w}_n(x, y) - u(x, y)$. В силу (2)

$$|\tilde{w}_n(x, y) - u(x, y)| \leqslant \pi \left\{ \int_0^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{w}_n - u) \right]^2 dx \right\}^{1/2} =$$

$$= \pi \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left(\operatorname{sh} ky - \frac{k}{\xi_{kn}} \operatorname{sh} \xi_{kn} y \right)^2 \right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Из условия (8) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{k^2} \operatorname{sh}^2 k < \pi M^2. \tag{4}$$

Нетрудно показать, что выражение (3) при выполнении неравенства (4) достигает максимума при следующих значениях чисел a_k:

$$a_k = 0 \quad (k \neq q); \qquad a_q = \pi^{1/2} Mq \operatorname{sh}^{-1} q, \tag{5}$$

где q — некоторое число. Подставляя (5) в (3), получим:

$$|\tilde{w}_n(x, y) - u(x, y)| < \pi^{3/2} Mq \operatorname{sh}^{-1} q \left(\operatorname{sh} qy - \frac{q}{\xi_{qn}} \operatorname{sh} \xi_{qn} y\right) =$$

$$= \pi^{3/2} Mq \frac{\operatorname{sh} qy}{\operatorname{sh} q}\left(1 - \frac{q}{\xi_q} \frac{\operatorname{sh} \xi_q y}{\operatorname{sh} qy}\right).$$

Можно показать, что если $(\varepsilon_n)^{1/(2m-2)} = p_n + 1/2$, где p_n — целые числа, то справедливо неравенство

$$q \frac{\operatorname{sh} qy}{\operatorname{sh} q}\left(1 - \frac{q}{\xi_{qn}} \frac{\operatorname{sh} \xi_{qn} y}{\operatorname{sh} qy}\right) < c_1 y \left(\frac{2m+1}{1-y}\right)^{2m+1} e^{-(2m+1)\varepsilon_n}.$$

Следовательно,

$$|\tilde{w}_n(x, y) - u(x, y)| < \pi^{3/2} c_1 My \left(\frac{2m+1}{1-y}\right)^{2m+1} e^{-2(m+1)\varepsilon_n}. \tag{6}$$

Теперь оценим разность $|\tilde{w}_n(x, y) - w_n(x, y)|$. В силу (2)

$$|\tilde{w}_n(x, y) - w_n(x, y)| \leqslant \pi \left\{\int_0^\pi \left[\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{w}_n - w_n)\right]^2 dx\right\}^{1/2} =$$

$$= \pi \left\{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{kn})^2 \frac{1}{\xi_{kn}^2} \operatorname{sh}^2 \xi_{kn} y\right\}^{1/2}. \tag{7}$$

Из условия (5) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{kn})^2 < \pi \alpha_n^2. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что максимум выражения (7) при условии (8) достигается при следующих значениях чисел $a_k - a_{kn}$:

$$a_k - a_{kn} = 0 \quad (k \neq q'); \qquad a_{q'} - a_{q'n} = \pi^{1/2} \alpha_n, \tag{9}$$

где q' — некоторое число. Подставляя (9) в (7), получим:

$$|\tilde{w}_n(x, y) - w_n(x, y)| \leqslant \pi^{1/2} \alpha_n \frac{1}{\xi_{q'n}} \operatorname{sh} \xi_{q'n} y < c_2 \pi^{1/2} \alpha_n e^{y(m\varepsilon_n)^{1/(2m-2)}}. \tag{10}$$

Складывая неравенства (6) и (10), получим:

$$|w_n(x, y) - u(x, y)| < \pi^{3/2} c_1 y \left(\frac{2m+1}{1-y}\right)^{2m+1} e^{-(2m+1)\varepsilon_n} + \pi^{3/2} c_2 \alpha_n e^{y(m\varepsilon_n)^{-1/(2m-2)}}.$$

Полагая $\varepsilon_n = \dfrac{\beta^{-(2m-2)}}{m \ln^{2m-2}(cM/\alpha_n)}$, получим

$$|w_n(x, y) - u(x, y)| < \pi^{3/2} Mc_1 y \left(\frac{2m+1}{1-y}\right)^{2m+1} e^{-(2m+1)} \frac{\beta^{-(2m-2)}}{m \ln^{2m-2}(cM/\alpha_n)} +$$

$$+ \pi^{3/2} c_2 (cM)^{\beta y} \alpha^{1-\beta y}. \tag{11}$$

Из неравенства (11) следует сходимость последовательности функций $w_n(x, y)$ к функции $u(x, y)$, что и требовалось показать.

Аналогичные рассуждения можно провести и в случае, если на функции $u_n(x, y)$ не накладывать условия $u_n(x, 0) = 0$ и, соответственно, не считать, что $u(x, 0) = 0$.

Поступило
11 I 1955