Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 2

МАТЕМАТИКА

Б. БОЯРСКИЙ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 II 1955)

1. Настоящая работа посвящена следующим граничным задачам:

Задача 1. Требуется найти непрерывные в области T плоскости z комплексные решения уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = A\bar{U}, \tag{1}$$

удовлетворяющие граничному условию

$$\operatorname{Re}\left[a\frac{\partial U^+}{\partial z} + bU\right] = \gamma, \quad \frac{\partial U^+}{\partial z} = \lim_{z\to t}\frac{\partial U}{\partial z}, \quad z \in T, \quad t \in L, \tag{2}$$

где $A(z)$ — заданная комплексная функция точки $z = x + iy$; $a(s)$, $b(s)$ — заданные комплексные функции точки $t = t(s)$ кривой L, ограничивающей область T; γ — вещественная функция точки $t \in L$; s — дуга кривой L.

Требуем, чтобы решение удовлетворяло следующим условиям*: а) $U(z) \in C_{\bar{z}}(T)$; б) $U(z)$ непрерывна в $T + L$; в)** $\partial U / \partial z$ ограничена в T.

В отношении данных задачи примем следующие допущения: $A(z)$ непрерывна по Гельдеру в $T + L$; a, b непрерывны по Гельдеру на L, причем $a \neq 0$ на L. Умножением обеих частей уравнения (2) на $|a|^{-1}$ можно добиться, чтобы $|a| = 1$.

В отношении контура L предположим, что он состоит из конечного числа ограниченных, замкнутых, непересекающихся кривых Ляпунова $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_{m-1}$, причем L_0 содержит внутри себя все остальные. Область T будет тогда m-связной.

Задача 2. Требуется найти непрерывные в $T + L$ решения уравнения (1), удовлетворяющие граничному условию

$$\operatorname{Re}\left[aU + \int_L K(t, t_0)\, U(t)\, ds\right] = f(t_0). \tag{3}$$

При решении задачи 2 можно ослабить ограничения на $A(z)$: достаточно, чтобы A была ограничена в T. Естественно, отпадает также условие в) для решений. В остальном сохраняем все предположения задачи 1.

Задача 1 обнимает общую краевую задачу для систем линейных эллиптических уравнений первого порядка на плоскости с граничным условием вида $\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v}{\partial x} + \delta\frac{\partial v}{\partial y} + \mu u + \nu v = f$ с переменными коэффициентами и является обобщением задачи Пуанкаре в теории гармонических функций. Задача 1 является основной краевой задачей, воз-

* Обозначения те же, что в статье (1).

** Условия б) и в) выделены, так как условие в) при тех же методах допускает значительные обобщения. Например, достаточно предположить, что $\int_{L_r} \ln^+\left|\frac{\partial U}{\partial z}\right| ds < C$ для всех $r < 1$, где L_r — образ окружности радиуса r при конформном отображении единичного круга на область T (или ее односвязную часть). Достаточно предположить, что граничное условие (2) удовлетворяется почти всюду на L.

никающей в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны, она встречается также в теории тонких оболочек.

В работе (1) рассмотрена граничная задача для системы (1) с краевым условием вида $\mathrm{Re}\,[aU] = f$ и разработаны общие приемы решения других краевых задач для системы (1). В настоящей работе задачи 1 и 2 исследуются на основе методов и результатов работы (1).

2. Как показал И. Н. Векуа (1), всякое непрерывное в $T + L$ решение $U(z)$ уравнения (1) допускает представление

$$U(z) = \Phi(z) + \iint_T \Gamma_1(z, t)\,\Phi(t)\,dT_t + \iint_T \Gamma_2(z, t)\,\overline{\Phi(t)}\,dT_t, \qquad (4)$$

где $\Phi(z)$ — функция, непрерывная в $T + L$ и голоморфная в T; $\Gamma_1(z, t)$ и $\Gamma_2(z, t)$ — некоторые комплексные функции точек z, $t \in T$, так называемые резольвенты уравнения (1). Их свойства исследованы в работе (1).

Из условия а), вообще говоря, не следует, что решение $U(z)$ уравнения (1) обладает производной $\partial U / \partial z$. Но при наших предположениях имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Если $A(z)$ непрерывна по Гельдеру в $T + L$, то*: 1) *всякое решение уравнения* (1), *удовлетворяющее лишь условию* а), *обладает внутри T обычными производными $\partial U / \partial x$ и $\partial U / \partial y$ (значит, также $\partial U / \partial z$), непрерывными по Гельдеру внутри T*; 2) *производные $\partial U / \partial x$ и $\partial U / \partial y$ решения уравнения* (1), *удовлетворяющего условиям* а), б), в) *и граничному условию* (2), *непрерывны по Гельдеру в замкнутой области $T + L$*; 3) *функция $\Phi(z)$ в представлении* (4) *решения $U(z)$ уравнения* (1), *удовлетворяющего условиям пункта* 2), *обладает производной $\Phi'(z)$, непрерывной по Гельдеру вплоть до границы L. Если $A(z)$ непрерывна и ограничена в T, то всякое решение задачи* 2 *непрерывно по Гельдеру в $T + L$; $\Phi(z)$ в представлении* (4) *такого решения также непрерывна по Гельдеру в $T + L$.*

Доказательство теоремы 1 опирается на представление (4), некоторые свойства сингулярных интегралов вида $\iint_T \frac{f(\sigma)}{(\sigma - z)^2}\,dT_\sigma$ и другие леммы.

Теорема 1 позволяет построить стандартным путем сингулярные интегральные уравнения для задач 1 и 2. Действительно, на основании теоремы 1 п. 3 $\Phi(z)$ допускает представление (2)

$$\Phi(z) = \int_{L_0} \mu(t)\left[\ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) + 1\right] ds + iC + \sum_{k=1}^{m-1} \int_{L_k} \mu(t) \ln\left(1 - \frac{t - z_k}{z - z_k}\right) ds, \qquad (5)$$

где $\mu(t)$ — некоторая действительная функция точки $t \in L$, непрерывная по Гельдеру на L; $z_1, \ldots, z_{m-1}$ — некоторая фиксированная система точек внутри контуров $L_1, \ldots, L_{m-1}$, соответственно. Подставляя (5) в (4) и вставляя полученную формулу в граничное условие (2), получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром типа Коши, эквивалентное задаче 1. Отсюда на основании известных (2) теорем о разрешимости сингулярных интегральных уравнений можно сделать ряд выводов о разрешимости задачи 1. Не останавливаясь подробнее на формулировках этих выводов, приведем здесь только два следствия, относящиеся к случаю, когда задача 1 разрешима при любой правой части.

Пусть $U_n(z)$ — полная система решений уравнения (1) внутри области T. Такую систему построить очень легко (1). Можно предположить, что $U_n(z)$ непрерывно дифференцируемы в $T + L$. Подставляя U_n в левую часть граничного условия, получаем некоторую систему $S_n(t)$ непрерывных функций на контуре L.

Следствие 1. Для того чтобы задача 1 была разрешима при любой правой части, необходимо и достаточно, чтобы система $S_n(t)$ была замкнута относительно класса непрерывных функций на контуре L.

Можно построить также некоторые другие системы функций и при помощи понятия замкнутости этих систем сформулировать критерии разрешимости задачи 1 ([3]). Важно, что все эти системы строятся в явном виде из коэффициентов уравнения (1) и левой части граничного условия.

Небезынтересно также следующее следствие:

Следствие 2. Для того чтобы задача 1 была разрешима однозначно при любой правой части, необходимо и достаточно, чтобы: 1) соответствующая однородная задача имела только тривиальное решение; 2) $2n = 3(m-2)$ $\left(\text{здесь } n = \frac{1}{2\pi}[\arg \overline{a}]_L,\ m \text{ — число связности области } T\right)$.

В частности, это невозможно при m нечетном ни при каком граничном условии вида (2) или (3) ($a \neq 0$ на L), т. е. для областей односвязных, трехсвязных и т. д.

3. Дадим определение задач 1* и 2*, сопряженных с задачами 1 и 2, и сформулируем соответствующие альтернативы, обобщающие альтернативы Нетера ([2]) из теории сингулярных интегральных уравнений.

Сначала рассмотрим задачу 2. Условие (3) будем записывать в виде $\operatorname{Re} L(aU) = f$, где L — некоторый оператор вида $Lv = v + Tv$, T — интегральный оператор (вполне непрерывный) в пространстве Гильберта комплексных функций дуги контура L, интегрируемых с квадратом на L. Предполагаем, что уравнение $Lv = 0$ не имеет нетривиальных решений. Тогда задачу 2*, сопряженную с задачей 2, определим следующим образом:

Найти непрерывные в $T + L$ решения уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial \overline{z}} = -\overline{A}\,\overline{V}, \tag{6}$$

удовлетворяющие однородному граничному условию

$$\operatorname{Re} L^{*-1}(\overline{at'}\,V) = 0. \tag{7}$$

Здесь L^* — оператор, сопряженный с L; L^{-1} — обратный к L в смысле обычных определений теории операторов. Число $n = \frac{1}{2\pi}[\arg \overline{a}]_L$ назовем индексом задачи 2. Тогда, в соответствии с граничным условием (7), индексом задачи 2* будет число $n^* = \frac{1}{2\pi} \arg [a\,\overline{t'}]_L = -n + m - 2$, где m — число связности области T.

Граничное условие задачи 2* имеет такой же вид, как граничное условие задачи 2. Поэтому имеет смысл задача 2** — сопряженная с 2*. Нетрудно проверить, что 2** совпадает с 2. Для задачи 2* справедлива также теорема 1 пункта 1.

Предполагая, что $U(z)$ — решение задачи 2 и представляя функцию $\Phi(z)$ формулы (4) в виде $\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} + iC$, получаем обычным путем сингулярное интегральное уравнение задачи 2. Обозначим его через $A\mu = f$; союзное с ним однородное уравнение пусть будет $A^*\chi = 0$. Оказывается, что построенное этим путем сингулярное интегральное уравнение обладает свойством, которое сформулируем в виде теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть $\chi(z)$ — вещественное решение уравнения $A^*\chi = 0$. Тогда формула*

$$-iL^*\chi = \overline{\overline{at'}(s)\,V(s)}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между решениями уравнения $A^*\chi = 0$, *удовлетворяющими добавочному условию* $\int_L \chi(s)\, h(s)\, ds = 0$, *и граничными значениями решений сопряженной задачи. Здесь* $h(s)$ — *некоторая действительная функция, зависящая только от уравнения* (1) *и левой части граничного условия* (2).

Из теоремы 2 вытекают следствия:

Следствие 3. Необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи 2 имеют вид

$$\int_L f(t)\, L^{*-1}(at^l \overline{V_j})\, ds = 0,$$

где V_j, $j = 1, 2, \ldots, l^*$, — полная система решений задачи 2*.

Следствие 4.

$$l - l^* = n - n^* = 2n - m + 2,$$

где l и l^* — числа линейно независимых решений однородных задач 2 и 2*; n и n^* — индексы задач 2 и 2*, соответственно.

Если вместо однородного уравнения (1) рассматривать неоднородное уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - A\overline{U} = F(z) \tag{8}$$

с однородным граничным условием вида (3), то имеет место следствие:

Следствие 5. Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (8) с однородным граничным условием вида (3) имеют вид

$$\operatorname{Re} \iint_T V_j(z)\, F(z)\, dT_z = 0, \quad j = 1, \ldots . l^*,$$

где $V_j(z)$ — полная система решений однородной задачи 2*.

Учитывая теорему 1, нетрудно видеть, что в случае дифференцируемости коэффициента $a(s)$ в граничном условии (2) можно его привести к виду $\operatorname{Re}\left[\frac{\partial aU}{\partial s} + b_1 aU\right] = \gamma$. Обозначая через L неограниченный оператор $Lv = \frac{\partial v}{\partial s} + b_1 v$, граничное условие (2) опять записываем в виде $\operatorname{Re} L(aU) = \gamma$. Дальнейшее построение задачи 1* полностью совпадает с построением задачи 2*.

Разница заключается только в том, что полученное сейчас уравнение $A\mu = \gamma$ не будет уже сингулярным интегральным уравнением, а только интегро-дифференциальным сингулярным уравнением, однако для него, как доказывается, сохраняют место обычные альтернативы Нетера. Также остается в силе теорема 2. Из нее вытекают в дословной формулировке следствия 3, 4 и 5. Нетрудно видеть, что граничное условие задачи 1* не содержит уже дифференциальных операций от искомой функции, а только интегральные.

4. Все сказанное относительно задачи 2 сохраняет свою силу, если в граничном условии (2) стоит любой вполне непрерывный оператор, переводящий интегрируемые функции в функции, удовлетворяющие условию Гельдера на L.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 IX 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, Матем. сборн., 31 (73): 2 (1952). [2] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М.— Л., 1946. [3] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948.