

Г. А. АРТЕМОВ

МЕТОД ЧАПЛЫГИНА И ЕГО УПРОЩЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 I 1955)

Метод Чаплыгина для уравнений в частных производных 1-го порядка изучался в работах Е. Ф. Саваренского⁽¹⁾ и В. А. Чечика⁽²⁾. Для уравнения в частных производных 2-го порядка нам известен только результат С. А. Чаплыгина⁽³⁾ для линейного уравнения эллиптического типа. В настоящей заметке показывается применимость метода Чаплыгина для решения задачи Коши для одного вида нелинейного уравнения в частных производных 2-го порядка гиперболического типа с двумя переменными.

1. Рассмотрим уравнение

$$u_{xy} = f(x, y, u, p, q), \quad (1)$$

где $p = u_x$, $q = u_y$, при начальном условии

$$u|_l = u(t), \quad p|_l = p(t), \quad q|_l = q(t),$$

заданном вдоль кривой l , уравнения которой $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

При этом относительно кривой l предполагаем:

1) любая прямая, проведенная параллельно координатным осям, пересекает ее не более чем в одной точке;

2) $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции, имеющие непрерывные производные 1-го и 2-го порядков;

3) $y'_x < 0$.

Относительно правой части уравнения (1) предполагаем, что:

а) $f(x, y, u, p, q)$ имеет непрерывные производные 2-го порядка по всем своим аргументам в области B_0 , которая образована характеристиками, проведенными через концы дуги кривой l , и расположена справа от l ;

б) в области B_0 $f_u > 0$, $f_p > 0$ и $f_q > 0$.

Теорема 1. Пусть в уравнении (1) $f(x, y, u, p, q)$ удовлетворяет условиям а) и б) и пусть вдоль кривой l , удовлетворяющей условиям 1), 2) и 3), заданы начальные значения $u|_l = u(t)$, $p|_l = p(t)$ и $q|_l = q(t)$, которые имеют непрерывные производные 2-го порядка.

Тогда, если функция $z(x, y)$ имеет непрерывные производные 2-го порядка в замкнутой области $\bar{B}_0$ и удовлетворяет в этой области уравнению

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y) + \varphi(x, y) = F(x, y, z, z_x, z_y), \quad (2)$$

где $\varphi(x, y) < 0$, и начальным условиям

$$z|_l = u|_l, \quad z_x|_l = p|_l, \quad z_y|_l = q|_l,$$

то во всей области B_0 справедливы неравенства

$$u(x, y) > z(x, y), \quad p(x, y) > z_x(x, y), \quad q(x, y) > z_y(x, y).$$

Функцию $z(x, y)$, удовлетворяющую условиям теоремы, будем называть нижней функцией решения уравнения (1). Аналогично вводится понятие верхней функции.

II. Для построения последовательности нижних функций $\{u_m(x, y)\}$ и последовательности верхних функций $\{\bar{u}_m(x, y)\}$ решения уравнения (1) вводим в рассмотрение замкнутую 5-мерную область $\bar{B}$, проекцией которой на плоскости XOY является область $\bar{B}_0$, определенная выше, а координаты u, p, q точки $(x, y, u, p, q) \in \bar{B}$ удовлетворяют неравенствам $\underline{u}_0(x, y) \leq u \leq \bar{u}_0(x, y)$, $\underline{u}_{0x}(x, y) \leq p \leq \bar{u}_{0x}(x, y)$ и $\underline{u}_{0y}(x, y) \leq q \leq \bar{u}_{0y}(x, y)$, где $\underline{u}_0(x, y)$ и $\bar{u}_0(x, y)$ — некоторые нижняя и верхняя функции решения $u(x, y)$ уравнения (1).

Относительно функции $f(x, y, u, p, q)$ полагаем, что в области $\bar{B}$ имеет место:

А. $f_u(x, y, u, p, q) > 0$, $f_p(x, y, u, p, q) > 0$ и $f_q(x, y, u, p, q) > 0$.

Б. Квадратичная форма $f_{uu}\xi^2 + f_{pp}\eta^2 + f_{qq}\gamma^2 + f_{up}\xi\eta + f_{uq}\xi\gamma + f_{pq}\eta\gamma \leq 0$.

В. Смешанные производные $f_{up} \geq 0$, $f_{uq} \geq 0$, $f_{pq} \geq 0$.

Г. $f_{xp} \leq 0$ и $f_{yq} \leq 0$.

Построение последовательности нижних функций решения уравнения (1) осуществляется следующим образом. Берутся нижняя функция $\underline{u}_0(x, y)$ и верхняя функция $\bar{u}_0(x, y)$ и строится линейное уравнение

$$\begin{aligned} \alpha_{1xy} &= \frac{f(x, y, \bar{u}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) - f(x, y, \underline{u}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0)}{\bar{u}_0 - \underline{u}_0} \alpha_1 - \\ &= \frac{f(x, y, \underline{u}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) - f(x, y, \underline{u}_0, \underline{p}_0, \bar{q}_0)}{\bar{p}_0 - \underline{p}_0} \alpha_{1x} - \\ &= \frac{f(x, y, \underline{u}_0, \underline{p}_0, \bar{q}_0) - f(x, y, \underline{u}_0, \underline{p}_0, \underline{q}_0)}{\bar{q}_0 - \underline{q}_0} \alpha_{1y} + \varphi_0(x, y) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varphi_0(x, y)$ — невязка уравнения (1), соответствующая функции $\underline{u}_0(x, y)$. Решив уравнение (3) относительно α_1 при нулевом начальном условии вдоль кривой l , т. е. $\alpha_1|_l$, $\alpha_{1x}|_l$, $\alpha_{1y}|_l$ получим поправку для нижней функции.

Из теоремы 1 следует, что $\alpha_1(x, y) > 0$, поэтому

$$\underline{u}_1(x, y) = \underline{u}_0(x, y) + \alpha_1(x, y) > \underline{u}_0(x, y).$$

Пользуясь результатами нашей работы (4), можно показать, что $\underline{u}_1(x, y)$ является нижней функцией решения уравнения (1), поэтому можно принять ее за исходную. Последовательно повторяя процесс, получим монотонно возрастающую последовательность нижних функций, т. е.

$$\underline{u}_0(x, y) < \underline{u}_1(x, y) < \dots < u(x, y). \quad (4)$$

Аналогично построим последовательность верхних функций.

Если $\bar{u}_0(x, y)$ — верхняя функция, то следующее приближение будет $\bar{u}_1(x, y) = \bar{u}_0(x, y) - \beta_1(x, y)$, где $\beta_1(x, y)$ — решение уравнения

$$\beta_{1xy} - f_u(x, y, \bar{u}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) \beta_1 - f_p(x, y, \bar{u}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) \beta_{1x} - f_q(x, y, \bar{u}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) \beta_{1y} - \bar{\varphi}_0(x, y) = 0 \quad (5)$$

при начальном условии

$$\beta_1|_l = \beta_{1x}|_l = \beta_{1y}|_l = 0.$$

Функция $\beta_1(x, y) > 0$, поэтому $\bar{u}_1(x, y) < \bar{u}_0(x, y)$, а так как $\bar{u}_1(x, y)$ является верхней функцией, то $u(x, y) < \bar{u}_1(x, y) < \bar{u}_0(x, y)$.

Повторяя построение, получим последовательность верхних функций

$$u(x, y) < \dots < \bar{u}_1(x, y) < \bar{u}_0(x, y). \quad (6)$$

Последовательности (4) и (6) равномерно сходятся к решению уравнения (1) при любом выборе начальных функций $\bar{u}_0(x, y)$ и $\bar{u}_0(x, y)$.

Скорость сходимости приближения решений и их производных по x, y к решению уравнения (1) и соответствующим производным для всех m , начиная с некоторого $m = m'$, оценивается следующим образом:

$$|\bar{u}_m - \underline{u}_m| < \frac{1}{2^{2^n}}, \quad |\bar{p}_m - \underline{p}_m| < \frac{1}{2^{2^n}}, \quad |\bar{q}_m - \underline{q}_m| < \frac{1}{2^{2^n}}. \quad (7)$$

III. Изложенное построение последовательностей (4) и (6) сводится к решению линейных уравнений вида (3) и (5). Такие уравнения можно решать, например, по методу Римана, который сводит задачу к построению функции Римана. Построение такой функции в общем случае для линейного уравнения представляет непреодолимые трудности. Поэтому вместо функции Римана мы вводим другую функцию, при помощи которой находятся приближенные решения уравнений (3) и (5).

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x', y', x_0, y_0) = \exp \left[\int_{x'}^{x_0} b(\xi, y_0) d\xi \right] + \exp \left[\int_{y'}^{y_0} a(x_0, \eta) d\eta \right] - 1, \quad (8)$$

где $a(x, y)$ — коэффициент при α_x (или β_x) и $b(x, y)$ — коэффициент при α_y (или β_y) в линейном уравнении (3) или (5); x_0, y_0 — координаты любой точки из B_0 ; x' — абсцисса точки пересечения кривой l с прямой $y = y_0$ и y' — координата точки пересечения кривой l с прямой $x = x_0$.

Относительно функции $\Phi(x', y', x_0, y_0)$ имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. Если в уравнении

$$u_{xy} - a(x, y)u_x - b(x, y)u_y - c(x, y)u - f = 0 \quad (9)$$

коэффициенты a, b, c, f — положительные непрерывные функции, имеющие непрерывные производные по x, y в области B_0 , в которой, кроме того, $a'_x \leq 0$ и $b'_y \leq 0$, то функция

$$u(x_0, y_0) \leq \int_{x'}^{x_0} \int_{y'}^{y_0} \Phi(\xi, \eta, x_0, y_0) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (10)$$

в области $\bar{B}_0$ неотрицательна и является нижней функцией $u(x, y)$ решения уравнения (9) при нулевом начальном условии вдоль кривой l , и, следовательно, $0 \leq u(x_0, y_0) \leq \bar{u}(x_0, y_0)$. При этом равенство будет только на кривой l .

Пользуясь формулой (10), из уравнения (3) получим $\alpha_1(x_0, y_0) < \bar{\alpha}_1(x_0, y_0)$, из уравнения (5) $\beta_1(x_0, y_0) < \bar{\beta}_1(x_0, y_0)$, следовательно,

$$\underline{u}_0(x_0, y_0) < \underline{u}_1(x_0, y_0) = \underline{u}_0(x_0, y_0) + \alpha_1(x_0, y_0) < \bar{u}_1(x_0, y_0);$$

$$\bar{u}_1(x_0, y_0) < \bar{u}_1(x_0, y_0) = \bar{u}_0(x_0, y_0) - \beta_1(x_0, y_0) < \bar{u}_0(x_0, y_0).$$

Функции $\underline{u}_1(x_0, y_0)$ и $\bar{u}_1(x_0, y_0)$ являются, соответственно, нижней и верхней функцией решения уравнения (1), поэтому

$$\underline{u}_0(x_0, y_0) < \underline{u}_1(x_0, y_0) < u(x_0, y_0); \quad u(x_0, y_0) < \bar{u}_1(x_0, y_0) < \bar{u}_0(x_0, y_0).$$

Повторяя описанный процесс, получим последовательность нижних функций

$$\underline{u}_0(x_0, y_0) < \underline{u}_1(x_0, y_0) < \dots < u(x_0, y_0) \quad (11)$$

и верхних функций

$$u(x_0, y_0) < \dots < \bar{u}_1(x_0, y_0) < \bar{u}_0(x_0, y_0). \quad (12)$$

Последовательности (11) и (12) равномерно сходятся к решению уравнения (1). При помощи весьма грубых оценок удастся показать, что скорость сходимости приближения не хуже, чем в методе последовательных приближений.

Замечания. 1. Если принять $\Phi(x', y', x_0, y_0) = \exp \left[\int_{y'}^{y_0} a(x_0, \eta) d\eta \right]$

или $\Phi(x', y', x_0, y_0) = \exp \left[\int_{x'}^{x_0} b(\xi, y_0) d\xi \right]$, то функция $\underline{u}(x_0, y_0)$, полученная по формуле (10), также является нижней функцией.

2. Если $\Phi(x', y', x_0, y_0) \equiv 1$, то наше построение приближений совпадает с методом последовательных приближений.

Пример. Найти решение $u(x, y)$ уравнения $u_{xy} = \frac{p^2}{8} + \frac{q}{x} - \frac{1}{x}$ в треугольнике, который образован отрезком прямой $y = 1 - x$ и двумя характеристиками $x = 1$, $y = 1/2$ при начальном условии $u|_l = p|_l = q|_l = 1$.

Если принять за начальную нижнюю функцию $\underline{u}_0(x, y) = x + y$ и за начальную верхнюю $\bar{u}_0(x, y) = 1/2(x + y)^2 + 1/2$, то величина ошибки в точке $C(1, 1/2)$ будет $\bar{u}_0(1, 1/2) - \underline{u}_0(1, 1/2) = 0,125$. Если взять

$\Phi(x', y', x_0, y_0) = \exp \left[\int_{x'}^{x_0} b(\xi, y_0) d\xi \right]$, то после первого шага построенного процесса ошибка в этой точке не превышает $\bar{u}_1(1, 1/2) - \underline{u}_1(1, 1/2) = 0,00606$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность С. Г. Крейну за помощь при написании данной работы.

Криворожский горнорудный институт

Поступило
14 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. Ф. Саваренский, ДАН, 51, № 4 (1946). ² В. А. Чечик, ДАН, 91, № 4 (1953). ³ С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, 1950. ⁴ Г. А. Артемов, ДАН, 101, № 2 (1955).