Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 1

ФИЗИКА

Ф. И. ФЕДОРОВ

О ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

(Представлено академиком А. А. Лебедевым 13 XII 1954)

Как известно, поляризация плоской монохроматической электромагнитной волны определяется видом кривой, которую описывает конец электрического или магнитного вектора, рассматриваемого в фиксированной точке пространства. Выражения для векторов поля такой волны имеют вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\varphi}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\varphi}, \quad \varphi = \omega\left(\frac{1}{c}\,\mathbf{mr} - t\right), \tag{1}$$

Вектор $\mathbf{m}$, входящий в фазу φ, мы будем называть вектором рефракции (1). Для однородных волн он определяется формулой $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$, где n — показатель преломления, $\mathbf{n}$ — единичный вещественный вектор волновой нормали. Общепринято судить о характере поляризации по отношению E_y/E_x проекций комплексного вектора $\mathbf{E}_0$ (или $\mathbf{E}$) на декартовы оси в фазовой плоскости волны или по разности фаз тех же проекций вещественной части вектора $\mathbf{E}$. Такой способ обладает тем недостатком, что он связан с выбором частной системы координат, т. е. неинвариантен. Во многих случаях гораздо более удобными являются инвариантные критерии поляризации, которые могут быть сформулированы двумя способами. Используя первый способ, мы представляем комплексную векторную амплитуду в виде $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2$. Можно показать, что вещественные векторы $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ являются сопряженными полудиаметрами эллипса колебаний. Условие для линейной поляризации имеет вид $[\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2] = 0$, для круговой $\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2 = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = 0$. Правое (левое) направление обращения соответствует положительному (отрицательному) знаку произведения $\mathbf{n}[\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2]$. Полуоси эллипса определяются формулами $a^2 + b^2 = \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2$, $a^2b^2 = [\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2]^2$. Круговую поляризацию можно характеризовать также условием $\mathbf{E}_2 = \pm[\mathbf{nE}_1]$, причем знаки $+$ и $-$ соответствуют правому и левому направлениям обращения.

Второй способ позволяет определить поляризацию непосредственно по свойствам полного комплексного вектора $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\varphi}$. При линейной поляризации $[\mathbf{EE}^*] = 0$, при круговой $\mathbf{E}^2 = 0$, т. е. комплексный вектор $\mathbf{E}$ является изотропным. Направление обращения определяется знаком произведения $i\mathbf{n}[\mathbf{EE}^*]$; очевидно, замена $\mathbf{E}$ на $\mathbf{E}^*$ меняет направление обращения на обратное. Круговую поляризацию можно характеризовать также условием $\mathbf{E} = \pm i[\mathbf{nE}]$. Большая и малая полуоси эллипса колебаний (a, b) по величине и направлению равны, соответственно, вещественной и мнимой части «приведенного» вектора

$$\mathbf{E}_r = \sqrt{\frac{|\mathbf{E}^2|}{\mathbf{E}^2}}\,\mathbf{E} \tag{2}$$

и могут быть определены формулами $a^2 = {}^1/_2(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{E}^2|)$, $b^2 = {}^1/_2(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{E}^2|)$, $(|\mathbf{E}|^2 = \mathbf{EE}^*)$. Поэтому форму эллипса можно одно-

значно определить отношением $\gamma = |\mathbf{E}^2|/|\mathbf{E}|^2$, причем $\gamma = 0$ для круговой поляризации, $0 < \gamma < 1$ для эллиптической и $\gamma = 1$ для линейной поляризации. На основании вышеприведенных формул легко убедиться, что умножение вектора $\mathbf{E}$ на произвольный комплексный скалярный множитель α не меняет формы и ориентации эллипса, а также направления обращения, и лишь размеры эллипса увеличиваются в $|\alpha|$ раз.

При помощи приведенных выше критериев рассмотрим вопрос о поляризации неоднородных волн. Последние, как известно (см., например, [2]), являются затухающими плоскими волнами, у которых плоскости равных фаз и равных амплитуд непараллельны. Условие неоднородности (однородности) может быть выражено в виде $[\mathbf{mm}^*] \neq 0$ ($[\mathbf{mm}^*] = 0$). Неоднородные волны реализуются очень часто. Так, в проводящих средах распространяются, как правило, только неоднородные волны, исключая частный случай нормального падения света на поверхность среды (а также случай, когда световое возбуждение возникает внутри однородной среды). Неоднородные волны возникают также в диэлектрике при полном отражении. Уравнения Максвелла для волн (1) в изотропной среде принимают вид

$$\varepsilon \mathbf{E} = -[\mathbf{mH}], \quad \mu \mathbf{H} = [\mathbf{mE}]. \tag{3}$$

Отсюда следует $\mathbf{m}^2 = \varepsilon\mu$, поэтому для затухающих волн в диэлектрике, где ε вещественна, действительная и мнимая части комплексного вектора рефракции $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + i\mathbf{m}_2$ должны быть взаимно перпендикулярны: $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2 = 0$, т. е. такие волны всегда неоднородны. Из (3) получаем

$$\frac{|\mathbf{H}^2|}{|\mathbf{H}|^2} = \frac{|[\mathbf{mE}]^2|}{[\mathbf{mE}][\mathbf{m}^*\mathbf{E}^*]} = \frac{|\mathbf{m}^2| \cdot |\mathbf{E}^2|}{|\mathbf{m}|^2 \cdot |\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{m}^*\mathbf{E}|^2}. \tag{4}$$

Для однородных волн $[\mathbf{mm}^*] = 0$, следовательно, $|\mathbf{m}^2| = |\mathbf{m}|^2$ и $\mathbf{m}^*\mathbf{E} = \mathbf{mE} = 0$, поэтому

$$\frac{|\mathbf{H}^2|}{|\mathbf{H}|^2} = \frac{|\mathbf{E}^2|}{|\mathbf{E}|^2}, \tag{5}$$

т. е. формы эллипсов для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ всегда одинаковы. Именно поэтому имеет смысл понятие той или иной поляризации для однородной волны в целом. Кроме того из соотношений

$$\mu^2 [\mathbf{HH}^*] = \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{m} [\mathbf{EE}^*] + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} [\mathbf{mm}^*], \tag{6}$$

$$|\varepsilon|^2 [\mathbf{EE}^*] = \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{m} [\mathbf{HH}^*] + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} [\mathbf{mm}^*], \tag{7}$$

следует, что при $[\mathbf{mm}^*] = 0$ всегда $[\mathbf{EE}^*] \parallel [\mathbf{HH}^*]$, т. е. для однородных (хотя бы и затухающих) волн плоскости $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ совпадают. Однако для неоднородных волн $[\mathbf{mm}^*] \neq 0$, $|\mathbf{m}^2| \neq |\mathbf{m}|^2$, $\mathbf{m}^*\mathbf{E} \neq 0$, и поэтому в общем случае условия (5) и $[\mathbf{EE}^*] \parallel [\mathbf{HH}^*]$ не выполняются. Следовательно, кривые $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в общем случае не только не совпадают, но и лежат в разных плоскостях. Таким образом, понятие поляризации в обычном смысле не применимо к неоднородной волне в целом. Ввиду этого такие волны нужно характеризовать иным образом, а именно, указывая свойства векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ по отдельности. С этой целью введем следующие определения: трехмерный комплексный вектор $\mathbf{A}$ назовем *линейным*, если $[\mathbf{AA}^*] = 0$, и *нелинейным*, если $[\mathbf{AA}^*] \neq 0$. Нелинейный вектор $\mathbf{A}$ будем называть *круговым*, если $\mathbf{A}^2 = 0$, и *эллиптическим*, если $\mathbf{A}^2 \neq 0$. Пользуясь этими понятиями, можно, например, определить неоднородную (однородную) волну, как волну с нелинейным (линейным) вектором рефракции. Относительно общих свойств неоднородных волн можно высказать теперь следующие утверждения:

1. Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ всегда одновременно являются круговыми, так как, согласно (3), $\mu\mathbf{H}^2 = \varepsilon\mathbf{E}^2$; при этом

$$\mathbf{E} = \pm\frac{i}{\sqrt{\varepsilon\mu}}[\mathbf{mE}], \quad \mathbf{H} = \pm\frac{i}{\sqrt{\varepsilon\mu}}[\mathbf{mH}]. \tag{8}$$

Отсюда $\mathbf{E} = \pm i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{H}$ (см. (3)) и, значит, $[\mathbf{EE}^*] \parallel [\mathbf{HH}^*]$. Следовательно, в этом случае кривые $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ совпадают по форме и лежат в одной плоскости. Это есть единственный случай, когда можно говорить о единой (круговой) поляризации для неоднородной волны в целом.

2. Всякая неоднородная волна однозначно разлагается на сумму двух круговых волн с тем же вектором рефракции. Это разложение имеет вид: $\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-$, где

$$\mathbf{E}^\pm = {}^1/_2\left(\mathbf{E} \pm \frac{i}{\sqrt{\varepsilon\mu}}[\mathbf{mE}]\right), \quad \mathbf{H}^\pm = {}^1/_2\left(\mathbf{H} \pm \frac{i}{\sqrt{\varepsilon\mu}}[\mathbf{mH}]\right). \tag{9}$$

Каждая пара векторов $\mathbf{E}^+$, $\mathbf{H}^+$ и $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$ по отдельности удовлетворяет уравнениям (3) и условиям (8).

3. Общее решение уравнений (3) для неоднородных волн с заданным вектором рефракции $\mathbf{m}$ имеет вид:

$$\mathbf{E} = \alpha[\mathbf{m}[\mathbf{mm}^*]] + \mu\beta[\mathbf{mm}^*], \quad \mathbf{H} = \beta[\mathbf{m}[\mathbf{mm}^*]] - \varepsilon\alpha[\mathbf{mm}^*]. \tag{10}$$

Эти выражения тождественно удовлетворяют уравнениям (3) при любых значениях комплексных скалярных параметров α, β.

4. Если $\mathbf{E}$ — линейный вектор, то $\mathbf{H}$ — эллиптический, и наоборот. При этом эллиптический вектор лежит в плоскости вектора рефракции* $\mathbf{m}$, а линейный перпендикулярен к ней.

Для частного случая неоднородных волн в диэлектрике (полное отражение, $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2 = 0$) справедливы следующие утверждения:

5. Если $\mathbf{E}$ — линейный, то полуоси a, b эллипса, описываемого $\mathbf{H}$, соответственно параллельны $\mathbf{m}_2$, $\mathbf{m}_1$ и $b/a = |\mathbf{m}_2|/|\mathbf{m}_1| = \varkappa$ ($\varkappa$ — коэффициент затухания). Это утверждение сохраняет силу при перестановке $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

6. Эллипсы, описываемые $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, могут иметь одинаковую форму. Условие для этого имеет вид $\varepsilon|\alpha|^2 = \mu|\beta|^2$ — оно равносильно условию равенства средней электрической и магнитной энергии волны. Плоскости $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ при этом вообще не совпадают.

7. Условие совпадения плоскостей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеет вид $\varepsilon\alpha^2 + \mu\beta^2 = 0$ — оно эквивалентно условию круговой поляризации. При этом общая плоскость $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ параллельна $\mathbf{m}_2$ и образует с $\mathbf{m}_1$ угол χ, косинус которого равен коэффициенту затухания: $\cos\chi = \varkappa$.

8. При разложении волны на две круговых плоскости последних симметрично наклонены к плоскости вектора $\mathbf{m}$ под указанным углом χ.

9. Отношение средних электрической и магнитной энергий $\overline{w}_e/\overline{w}_m$ зависит от характера «поляризации» неоднородной волны и изменяется в пределах от $\mathbf{m}^2/|\mathbf{m}|^2$ (при линейном $\mathbf{E}$) до $|\mathbf{m}|^2/\mathbf{m}^2$ (при линейном $\mathbf{H}$).

Физико-технический институт
Академии наук БССР

Поступило
8 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. И. Федоров, ДАН, 84, 1171 (1952). [2] W. Kōnig, Handb. d. Phys., 20, 141 (1929).

* Под плоскостью комплексного нелинейного вектора подразумевается плоскость, определяемая его вещественной и мнимой частями.