Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 1

ФИЗИКА

А. А. СОКОЛОВ, А. Н. МАТВЕЕВ и И. М. ТЕРНОВ

О ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ И СПИНОВЫХ ЭФФЕКТАХ В ТЕОРИИ СВЕТЯЩЕГОСЯ ЭЛЕКТРОНА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 21 I 1955)

1. Как известно, интенсивность излучения при переходе релятивистского электрона из одного квантового состояния (главное квантовое число n) в другое (главное квантовое число $n' = n - \nu$) в постоянном и однородном магнитном поле равна (см. [1], формула (4))

$$W_{nn'} = ce^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \, \varkappa^2 \frac{1 - \frac{\varkappa}{K}}{1 - \frac{\varkappa}{K}\sin^2\theta} S, \qquad (1)$$

где $\cos\theta = (\vec{\varkappa}^0 \mathbf{H}^0)$; $\hbar\omega = c\hbar\varkappa = c\hbar(K - K')$ — энергия излучаемого фотона; $E^{1/2} = c\hbar K = c\hbar\sqrt{k_0^2 + k^2 + 4\gamma n}$ — энергия электрона; $m = \hbar k_0 / c$ — масса электрона; $\hbar\mathbf{k}$ — импульс, характеризующий движение вдоль оси z; величина $H = 2c\hbar\gamma / e$ определяет напряженность постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси z. Составляющие вектор-потенциала в этом случае равны: $A_x = -{}^1/_2 yH$, $A_y = {}^1/_2 xH$, $A_z = 0$.

Для величины S мы можем записать выражение

$$S = (\mathbf{a}\mathbf{j}^+)(\mathbf{a}^+\mathbf{j}). \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{j}$ — матричный элемент плотности электрического тока; $\mathbf{a}$ характеризует квантовые амплитуды излучаемого фотона.

При вычислении излучения для частиц спина ${}^1/_2$ мы должны пользоваться полувекторным уравнением (уравнением Дирака). Тогда для плотности тока $\mathbf{j}$ имеем формулу:

$$\mathbf{j} = \int \psi^+ e^{i\vec{\varkappa}\vec{r}} \vec{\alpha} \psi \, d^3x, \qquad (3)$$

причем волновые функции ψ определяются равенствами (2) и (5) работы [2].

При решении задачи для бесспиновой частицы мы должны использовать скалярное уравнение. В этом случае волновая функция ψ^0 и плотность тока $\mathbf{j}$ соответственно равны:

$$\psi^0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi LE}} e^{ihz + il\varphi} I_{ns}(\rho), \qquad (4)$$

$$\mathbf{j} = c \int \psi^{0+} e^{i\vec{\varkappa}\mathbf{r}} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi^0 \, d^3x, \qquad (5)$$

где $\rho = \gamma r^2$; l — азимутальное квантовое число; функция I_{ns} пропорциональна полиномам Лагерра (см. формулу (13) работы [2]).

2. Исследуем прежде всего поляризационные свойства излучаемого света. Разобьем квантовую амплитуду поперечного электромагнитного поля на две составляющие a^r и a^z, направленные, соответственно, перпендикулярно магнитному полю и почти параллельно ему:

$$a^r = \frac{[\vec{\varkappa}^0 \vec{H}^0]}{\sqrt{1-(\vec{\varkappa}^0 \vec{H}^0)^2}}\, a^r, \quad a^z = \frac{\vec{\varkappa}^0 (\vec{\varkappa}^0 \vec{H}^0) - \vec{H}^0}{\sqrt{1-(\vec{\varkappa}^0 \vec{H}^0)^2}}\, a^z, \tag{6}$$

причем $a^r a^{r+} = a^z a^{z+} = 1$, $a^r a^{z+} = 0$.

При исследовании поляризационных свойств излучаемого света воспользуемся уравнением Дирака. В этом случае для составляющих величины S находим соответственно значения:

$$S^r = |j_x|^2, \quad S^z = |j_y|^2 \cos^2\theta + |j_z|^2 \sin^2\theta - (j_y^+ j_z + j_z^+ j_y)\sin\theta\cos\theta. \tag{7}$$

Тогда для спектральных интенсивностей излучения, характеризующих также и поляризационные эффекты, получаем выражение:

$$W^{r,z}_{nn'} = \frac{9\sqrt{3}}{16\pi} W_{\text{кл}} \left[\int\limits_{y(1+\zeta y)}^{\infty} dx K_{5/3}(x) + b^{r,z}(1-3\zeta y) K_{2/3}(y) \right] y\, dy, \tag{8}$$

где $b^r = 1$; $b^z = -1$; $y = \frac{2}{3}\frac{\omega}{\omega_0}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^3$; $\omega_0 = \frac{c}{R_0}$; $\zeta = \frac{3}{2}\frac{\hbar}{mcR_0}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2$; величина $W_{\text{кл}} = \frac{2}{3}\frac{e^2 c}{R_0^2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4$ определяет интегральную интенсивность излучения в классическом приближении. Суммируя последнее выражение по состояниям поляризации, мы в классическом случае ($\hbar = 0$) получим выражение, найденное Д. Д. Иваненко и одним из нас [3] (см. также [4]) для спектрального распределения интенсивности излучения светящегося электрона.

При помощи формулы (8) можно показать, что максимумы интенсивностей излучения $W^r_{nn'}$ и $W^z_{nn'}$ смещены относительно максимума общей интенсивности $W_{nn'}$, соответственно, в сторону большей (для $W^r_{nn'}$) и меньшей (для $W^z_{nn'}$) частоты примерно на величину $^1/_{20}\, y$.

Интегрируя (8) по всевозможным значениям частоты излучения, получаем формулы для интегральной интенсивности излучения с учетом поляризационных эффектов:

$$W^r = W_{\text{кл}}\left(\frac{7}{8} - \frac{25\sqrt{3}}{12}\zeta + \ldots\right), \quad W^z = W_{\text{кл}}\left(\frac{1}{8} - \frac{5\sqrt{3}}{24}\zeta + \ldots\right). \tag{9}$$

Отсюда видно, что светящийся электрон будет излучать частично линейно поляризованный свет ($W^r > W^z$). Заметим, что признаки поляризации испускаемого света были обнаружены еще в одних из первых опытах по визуальному наблюдению «светящегося» электрона [5].

3. Исследуем далее зависимость интенсивности излучения от спина заряженной частицы. Решая задачу при помощи скалярного уравнения (спин равен 0) и при помощи полувекторного уравнения (спин равен $^1/_2$), мы найдем для величины S (см. формулу (2)) значение

$$S^0 = \frac{n\gamma}{KK'}\{(I_{n+1,n'} - I_{n-1,n'})^2 + \cos^2\theta\,(I_{n+1,n'} + I_{n-1,n'})^2\}; \tag{10}$$

$$S^{1/2} = \frac{n\gamma}{KK'}\left\{\sqrt{\frac{n'}{n}}(I_{n,n'-1} - I_{n-1,n'})^2 + \sqrt{\frac{n'}{n}}\cos^2\theta\,(I_{n,n'-1} + I_{n-1,n'})^2 + \right.$$

$$+ \sqrt{\frac{n'}{n}}\sin^2\theta\,(I_{nn'} - I_{n-1,n'-1})^2 + 2\sqrt{\frac{x_0}{n}}\cos^2\theta\,(I_{n,n'-1}I_{n-1,n'-1} + I_{n-1,n'}I_{nn'}) +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{x_0}{n}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)[(I^2_{n,n'-1} + I^2_{n-1,n'})(1 + \cos^2\theta) + (I^2_{nn'} + I^2_{n-1,n'-1})\sin^2\theta]\right\}, \quad (11)$$

где $x = \frac{\varkappa^2\sin^2\theta}{4\gamma} = \frac{1}{\beta^2\sin^2\theta}(\sqrt{n} - \sqrt{n - \nu\beta^2\sin^2\theta})^2$, $x_0 = (\sqrt{n} - \sqrt{n-\nu})^2$.

Здесь функция $I_{nn'}(x)$, как только что было указано, пропорциональна полиномам Лагерра и имеет в интересующем нас ультрарелятивистском случае следующее асимптотическое значение:

$$I_{nn'}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{nn'}}(1 - \beta^2\sin^2\theta)^{1/2}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}\frac{n^{3/2}x_0^{1/2}}{\sqrt{nn'}}(1 - \beta^2\sin^2\theta)^{3/2}\right). \quad (12)$$

Отсюда для интенсивности излучения получаем следующую формулу * (см. также ([1], [7])) без учета затухания (о затухании см., например, ([8])):

$$W^{0,1/2} = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi}W_{\text{кл}}\left\{\int_0^\infty dz\left[\frac{z}{(1+\zeta z)^3}\int_z^\infty dx\,K_{1/3}(x) + b^{0,1/2}\frac{z^3}{(1+\zeta z)^4}K_{1/3}(z)\right]\right\} =$$

$$= \begin{cases} W_{\text{кл}}\left(1 - \dfrac{55\sqrt{3}}{24}\zeta + \dfrac{8}{3}(7 + b^{0,1/2})\zeta^2 + \ldots\right) & \text{при } \zeta \ll 1; \\ \dfrac{2}{27}\dfrac{\Gamma(2/3)}{3^{4/3}}\dfrac{e^2c}{R_0^2}\left(\dfrac{E}{mc^2}\dfrac{mcR_0}{\hbar}\right)^{4/3}(9 + 7b^{0,1/2}) & \text{при } \zeta \gg 1, \end{cases} \quad (13)$$

где $z = \frac{y}{1-\zeta y}$, $b^0 = 0$ и $b^{1/2} = 1$.

Из (13) следует, что максимум интенсивности излучения лежит в области частоты:

$$\omega_{\max} \sim \omega_0\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3\frac{1}{1+\zeta} \sim \begin{cases} \dfrac{c}{R_0}\left(\dfrac{E}{mc^2}\right)^3, & \zeta \ll 1; \\ \dfrac{E}{\hbar}, & \zeta \gg 1. \end{cases} \quad (14)$$

Приравнивая разность энергий электрона в постоянном магнитном полу с учетом спина $\left(\text{энергия } E^{1/2} = \sqrt{E^2 \pm eHc\hbar} = E \pm \mu_0\frac{mc^2}{E}H, \right.$ $\left.\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}\right)$ и без его учета (энергия E) энергии магнитного момента в магнитном поле $-(\mu H)$ (более подробно см. ([9])), мы найдем

$$\mu \approx \mu_0\frac{mc^2}{E}. \quad (15)$$

Необходимо отметить, что для дираковских частиц отделение спинового магнитного момента от орбитального не может быть произве-

* Более подробно см. ([6]), где специально исследован случай $\zeta \sim 1$.

дено строго в общем случае. Однако в случае плоской орбиты ($\mathbf{k}=0$) энергия магнитного момента $\mu\rho_3\sigma_z H$ коммутирует с гамильтонианом, поэтому мы можем говорить о сохранении хотя бы этой величины.

Благодаря множителю mc^2/E электрон в релятивистском случае как бы «теряет» свой магнитный момент. Однако в нашей задаче дополнительное излучение дираковского электрона, повидимому, обязано именно спиновому моменту, поскольку в области очень больших энергий ($\zeta \sim 1$) ω_{max} сильно возрастает.

Подставляя в выражение, характеризующее отношение интенсивностей излучения магнитного момента и заряда, вместо μ и ω_{max}/c значения (15) и (14), мы найдем

$$\frac{W_\mu}{W_e} \sim \left(\frac{\mu}{e}\frac{\omega_{max}}{c}\right)^2 \sim \begin{cases} \zeta^2, & \zeta \ll 1; \\ 1, & \zeta \gg 1. \end{cases} \tag{16}$$

Отсюда в качественном согласии с формулой (13) следует, что при $\zeta \ll 1$ учет собственного магнитного момента дает поправки лишь в квантовых членах второго порядка, а при $\zeta \gg 1$ — уже в основном. Поэтому Швингер ([10]), вычисляя интенсивность излучения бесспинового электрона лишь с учетом квантовых членов первого порядка, получил формулу (24) (см. ([1])), найденную для частиц полуцелого спина.

Кстати, заметим, что выражение, установленное недавно Н. Ф. Нелипой (см. формулу (14) работы ([11])): $1+\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2$ для отношения интенсивностей излучения с учетом спина и без его учета, является неверным, так как при $\hbar = 0$ не обращается в единицу. Из предельной же формулы, связывающей матричный элемент с функцией Бесселя:

$$\lim_{n\to\infty;\ \nu,z\neq\infty} I_{n,n-\nu}\left(\frac{z^2}{4n}\right) = J_\nu(z),$$

находим, что при $\hbar = 0$ (т. е. $n = \infty$) оба выражения (10) и (11) точно переходят в классическое.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Соколов, Н. П. Клепиков, И. М. Тернов, ДАН, 89, 665 (1953). [2] А. А. Соколов, И. М. Тернов, ДАН, 92, 537 (1953). [3] Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, ДАН, 59, 1551 (1948) (см. также Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, Классическая теория поля, 1951, стр. 281). [4] J. Schwinger, Phys. Rev., 75, 1912 (1949). [5] F. R. Elder, R. V. Langmuir, H. C. Pollock, Phys. Rev., 74, 52 (1948). [6] А. Н. Матвеев, Диссертация, МГУ, 1954. [7] Н. П. Клепиков, ЖЭТФ, 26, 19 (1954). [8] А. А. Соколов, J. of Phys. USSR, 5, 231 (1941). [9] И. М. Тернов, Диссертация, МГУ, 1954, стр. 88. [10] J. Schwinger, Proc. Nat. Ac. Sci., 40, 132 (1954). [11] Н. Ф. Нелипа, ЖЭТФ, 27, 421 (1954).