Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 6

ФИЗИКА

М. К. ПОЛИВАНОВ

О НОВОМ ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 28 X 1954)

1. Сочетая видоизмененную технику Вика [1] с методикой вариационных производных, примененной Швингером [2], можно получить основные результаты [2] более простым путем, обходя введенные в [2] квантовый динамический принцип и внешние спинорные источники.

Техника Вика модифицируется в двух направлениях. Во-первых, оказывается удобным ввести неполное разложение T-произведения, где явно выписаны спаривания лишь одного — выделенного — оператора. Это видоизменение особенно просто и плодотворно при частичном разложении среднего по вакууму от T-произведения, когда обращаются в нуль все члены, содержащие множителем нормальное произведение Вика. Неполное разложение при этом выглядит так:

$$\langle T(A_1(x_1)\,A_2(x_2)\ldots A_n(x_n))\rangle_0 =$$

$$= \sum_{2\leqslant i\leqslant k} \overbrace{A_1(x_1)\,A_i(x_i)}\,\langle T(A_2(x_2)\ldots A_{i-1}(x_{i-1})\,A_{i+1}(x_{i+1})\ldots A_n(x_n))\rangle_0. \quad (1)$$

Второе видоизменение вызвано необходимостью пользоваться непосредственно экспоненциальной формой S-матрицы

$$S = T(e^{-i\int L(x)dx}),$$

чтобы обойти разложение в ряды теории возмущений. При этом оказывается необходимым распространить правила спаривания, определенные в [1] лишь для линейных операторов, на экспоненциальные операторы. Имея в виду представимость экспоненты в виде бесконечного произведения

$$e^{-i\int L(x)dx} = \prod_{j\geqslant 0}\left(1 - i\int_{\sigma_j}^{\sigma_{j+1}} L(x)dx\right) \qquad (\sigma_{j+1}-\sigma_j \to 0),$$

легко догадаться, как это сделать. Действительно, изымая из II один член и восстанавливая затем с точностью до бесконечно малых экспоненту, мы приобретаем в S линейный оператор, с которым и производится спаривание. Результат интегрируется затем в пределах $(-\infty, +\infty)$.

Окончательно можно сформулировать следующее общее утверждение:

$$\langle T(A_1(x_1)\ldots A_k(x_k)\,e^{-i\int L(x)dx})\rangle_0 =$$

$$= \sum_{2\leqslant i\leqslant k} \langle \overbrace{A_1 A_i}\, T(A_2\ldots A_{i-1}\,A_{i+1}\ldots A_k\,e^{-i\int L(x)dx})\rangle_0 -$$

$$- i\langle \int dz\,\overbrace{A_1(x_1)\,L(z)}\,T(A_2(x_2)\ldots A_k(x_k)\,e^{-i\int L(x)dx})\rangle_0, \quad (2)$$

где первый член содержит спаривание выделенного оператора $A_1(x_1)$ со всеми линейными операторами, а второй — спаривания $A_1(x_1)$ с непрерывно меняющимся оператором $L(x)$ в показателе экспоненты.

2. Весь дальнейший вывод основан на применении развитой выше техники и свойствах сингулярных функций S^F и D^F, появляющихся в результате спаривания операторов полей ψ_α, $\bar{\psi}_\beta$ и A_μ.

Лагранжиан взаимодействия выбирается в форме

$$L(x) = A_\mu(x)\,(j_\mu(x) + J_\mu(x)),$$

в которую введен внешний ток J_μ — параметр, по которому производится варьирование.

Определим функцию Грина состояния с одним электроном выражением

$$G_{\alpha\beta}(x, y) = i\frac{\langle T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\,S)\rangle_0}{\langle S\rangle_0}. \tag{3}$$

Это определение может быть мотивировано непосредственно обращением к графам Фейнмана.

Производя по формуле (2) разложение формы $\bar{G} = G\langle S\rangle_0$ и возвращаясь затем к G, предварительно заметив, что в одном из членов разложения появляется комбинация

$$\langle T(\psi(x)\,\bar{\psi}(y)\,A_\mu(\xi)\,e^{-i\int L(x)\,dx}\rangle_0 = \frac{\delta\bar{G}(x, y)}{\delta J_\mu(\xi)},$$

получим для $G(x, y)$ уравнение

$$\Big(-i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} - e\gamma^\mu\mathfrak{A}_\mu(x) + ie\gamma^\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu} + m\Big)G(x, y) = \delta(x - y), \tag{4}$$

где

$$\mathfrak{A}_\mu(x) = -i\frac{\delta\log\langle S\rangle_0}{\delta J_\mu(x)} = -\frac{1}{\langle S\rangle_0}\langle T(A_\mu(x)\,e^{-i\int L(x)dx})\rangle_0$$

вакуумный потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$-\Box\,\mathfrak{A}_\mu(x) = J_\mu(x) + ie\,\mathrm{tr}\,\{\gamma^\mu G(x, x')\}_{x'\to x}, \tag{5}$$

которое получается при помощи неполного разложения так же, как уравнение для G.

3. Функция Грина состояния с одним фотоном может быть определена так же как $G(x, y)$:

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu}(\xi,\xi') = i\left\{\frac{\langle T(A_\mu(\xi)\,A_\nu(\xi')\,S)\rangle_0}{\langle S\rangle_0} - \mathfrak{A}_\mu(\xi)\,\mathfrak{A}_\nu(\xi')\right\} \tag{6}$$

(в определении (3) член, аналогичный второму, обращается в нуль в силу сохранения заряда) или как

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu}(\xi,\xi') = \frac{\delta\mathfrak{A}_\mu(\xi)}{\delta J_\nu(\xi')} = \frac{\delta\mathfrak{A}_\nu(\xi')}{\delta J_\mu(\xi)}. \tag{6'}$$

Тождественность обоих определений очевидна.

Варьируя (5) по J_ν, получим уравнение для $\mathfrak{G}_{\mu\nu}(\xi,\xi')$:

$$-\Box_\lambda\mathfrak{G}_{\mu\nu}(\xi, \xi') = \delta_{\mu\nu}\delta(\xi - \xi') + ie\,\mathrm{tr}\left\{\gamma^\mu\frac{\delta G(\xi, \xi')}{\delta J_\nu(\xi')}\right\}. \tag{7}$$

4. Приведение уравнений (4) и (7) к виду (в матричной записи [2])

$$\begin{aligned}(\gamma\Pi + M)G &= 1,\\ (-\Box + P)\,\mathfrak{G} &= 1,\end{aligned} \tag{4'}$$

где

$$M = m + ie^2 Tr\{\gamma G\Gamma G\},$$
$$P = -ie^2 Tr\{\gamma GG\}, \qquad (7')$$

сводится к преобразованию вариационных производных. Все остальные результаты ([2]), включая уравнение для двухчастичной функции Грина и выражение для оператора взаимодействия, так же просто получаются применением неполного разложения.

После того как эта работа была полностью завершена и доложена на семинаре, вышла из печати статья Андерсона ([3]), в которой при помощи другого метода, отчасти похожего на предложенный, получены сходные результаты.

В заключение я глубоко благодарю Н. Н. Боголюбова, под чьим руководством была сделана эта работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. C. Wick, Phys. Rev., **80**, 268 (1950). [2] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452, 455 (1951). [3] J. L. Anderson, Phys. Rev., **94**, 703 (1954).