Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 1

ФИЗИКА

М. Л. ЛЕВИН

К ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 25 XII 1954)

В работе С. М. Рытова [1] дана общая макроскопическая теория тепловых электрических флуктуаций, в основе которой лежит введение хаотического стороннего электрического поля $\mathbf{K}$, являющегося источником магнитного поля. Последнее находится в [1] общими методами решения неоднородных краевых задач феноменологической электродинамики. Здесь мы покажем, что нахождение флуктуационного поля излучающего тела сводится к квадратурам, если известно решение соответствующей диффракционной задачи для этого тела.

1. В качестве источника флуктуационного поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удобнее брать не распределенное внутри излучающего тела хаотическое стороннее поле $\mathbf{K}$, а эквивалентный ему хаотический сторонний ток плотности $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{K}$. Пространственная корреляция для $\mathbf{K}$ имеет вид (см. [1], стр. 44*) $\overline{K_\alpha K_\beta^*} = \frac{\Theta}{\pi\sigma}\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')$, поэтому

$$\overline{j_\alpha(\mathbf{r}')\,j_\beta^*(\mathbf{r}')} = \frac{\Theta}{\pi}\sigma\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}''), \tag{1}$$

где температура Θ и проводимость σ являются, вообще говоря, функциями точки.

Для нахождения теплового поля в какой-либо точке пространства рассмотрим вспомогательное диффракционное поле $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$, созданное элементарным электрическим диполем, помещенным в эту точку. Как обычно, мы будем считать, что диполь образован сторонними токами $\mathbf{j}_0$, текущими в малом объеме τ, и что при стягивании этого объема к точке величина $\mathbf{F} = \int\limits_\tau \mathbf{j}_0\,dV = i\omega\mathbf{p}$ ($\mathbf{p}$ — дипольный момент) остается конечной.

Применяя к флуктуационному и диффракционному полям теорему взаимности, получим $\int\limits_\tau \mathbf{E}\mathbf{j}_0\,dV = \int\limits_\tau \mathbf{E}_0\mathbf{j}\,dV$, или после стягивания τ к точке

$$EF = \int \mathbf{E}_0\mathbf{j}\,dV, \tag{2}$$

где E — слагающая вектора $\mathbf{E}$ по направлению диполя $\mathbf{F}$. Умножая уравнение (2) на комплексно сопряженное и усредняя при помощи (1) по ансамблю, будем иметь

$$\overline{|E|^2} = \frac{1}{|F|^2}\iint E_{0\alpha}(\mathbf{r}')\,E_{0\beta}^*(\mathbf{r}'')\,\overline{j_\alpha(\mathbf{r}')\,j_\beta^*(\mathbf{r}'')}\,dV'\,dV'' =$$
$$= \frac{1}{|F|^2}\int \frac{\Theta}{\pi}\sigma\,|\mathbf{E}_0|^2\,dV = \frac{2}{\pi|F|^2}\int \Theta\,dQ_0, \tag{3}$$

* Обозначения настоящей работы совпадают с [1]: $\mathbf{K}$ — стороннее поле, входящее в простой закон Ома. Всюду, где речь идет о флуктуационных величинах, имеются в виду спектральные плотности частоты ω.

где $dQ_0 = {}^1/_2 \sigma |\mathbf{E}_0|^2 dV$ — джоулевы потери диффракционного поля в объеме dV. Таким образом нахождение среднего квадрата электрического вектора теплового поля сводится к квадратурам, если известно диффракционное поле, созданное электрическим диполем в присутствии излучающего тела.

Пользуясь общей теоремой взаимности для электрических и магнитных токов (²), легко получить для среднего квадрата магнитного вектора $\overline{|H|^2}$ формулу, совпадающую по форме с (3), с той разницей, что источником вспомогательного диффракционного поля будет магнитный элементарный диполь, образованный эквивалентными магнитными токами в объеме τ.

Формула (3) получена нами для случая изотропного проводящего тела. Однако она верна и для анизотропных тел с тензором проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$ ($dQ = {}^1/_2 \sigma_{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta^*$), ибо в этом случае естественно принять, что пространственная корреляция токов имеет вид

$$\overline{j_\alpha j_\beta^*} = \frac{\Theta}{\pi} \sigma_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}''). \tag{4}$$

Если магнитная проницаемость тела комплексна, то — наряду с хаотическими электрическими токами — источником теплового поля являются и хаотические сторонние магнитные токи (эквивалентные вводимым в (¹) сторонним магнитным полям), пространственная корреляция которых дается формулой вида (1) или (4) с заменой электрической проводимости на магнитную. Пользуясь общей теоремой взаимности (²), мы снова придем к формуле (3), в которой dQ_0 будет суммой джоулевых и магнитных потерь диффракционного поля в объеме dV.

Из формулы (3) сразу следует, что для точек внутри проводящего тела макроскопическая теория флуктуаций дает расходящиеся выражения для $\overline{|E|^2}$ и $\overline{|H|^2}$ (подробно этот вопрос разобран в (¹)). Для точек же вне тела к формуле (3) приводит не только корреляционный закон (1), но и более общий закон (см. (¹), стр. 22) с добавочным членом $g(r)\left(\frac{x_\alpha x_\beta}{r^2} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\right)$ при условии, конечно, что радиус корреляции равен нулю.

Вводя для краткости записи среднюю (с весом, равным плотности тепловых потерь) температуру

$$\tilde{\Theta} = \frac{\int \Theta \, dQ_0}{Q_0}; \quad Q_0 = \int dQ_0, \tag{5}$$

можно переписать основную формулу (3) в виде

$$\overline{|E|^2} = \frac{2\tilde{\Theta} Q_0}{\pi |F|^2}. \tag{6}$$

В ряде задач интерес представляют не только интенсивности $\overline{|E|^2}$, $\overline{|H|^2}$, но и средние значения произведений различных составляющих векторов поля. Эти величины также выражаются через вспомогательные диффракционные поля. Перемножая выражения вида (2) и усредняя, найдем

$$\overline{E_1 E_2^*} = \frac{2}{\pi F_1 F_2^*} \int \Theta \cdot \frac{1}{2} \sigma \mathbf{E}_{01} \mathbf{E}_{02}^* \, dV. \tag{7}$$

Пользуясь формулами типа (7), можно вычислить, например, усредненный максвеллов тензор натяжений или найти корреляцию между составляющими векторов флуктуационного поля в разных точках пространства.

2. Рассмотрим теперь тот частный случай, когда излучающее тело находится в свободном пространстве (для простоты будем считать его вакуумом), а флуктуационное поле определяется в волновой зоне, т. е. на расстоянии R большом по сравнению с длиной волны λ и размерами тела. Тогда диффракционное поле в области, занятой телом, можно рассматривать как результат диффракции плоской электромагнитной волны. Если вектор диполя F ориентирован перпендикулярно R, то амплитуда этой плоской волны равна $E_{\text{пад}} = \frac{2\pi F}{c\lambda R}$, и вектор $\mathrm{E}_{\text{пад}}$ параллелен F. Заменяя в (6) F через $E_{\text{пад}}$ и вводя эффективный поперечник поглощения

$$A = \frac{Q_0}{\frac{c}{8\pi}|E_{\text{пад}}|^2},$$

получим

$$\overline{|E|^2} = \frac{\tilde{\Theta} A}{c\lambda^2 R^2}, \tag{8}$$

где E поляризовано параллельно F. Соответствующий поток энергии, отнесенный к единичному телесному углу, равен

$$P = R^2 \frac{c}{2\pi}\overline{|E|^2} = \frac{\tilde{\Theta}}{2\pi}\frac{A}{\lambda^2}. \tag{9}$$

3. Формула (6) справедлива, конечно, не только в свободном пространстве, но и в областях, ограниченных металлическими стенками — например, в эндовибраторах или в волноводах. В случае волновода, однако, интерес обычно представляет не само флуктуационное поле в той или иной точке, а мощность теплового поля, уносимая собственными бегущими волнами трубы.

Рассмотрим идеальный волновод (бесконечный или полубесконечный), внутри которого находится излучающее тепловое поле тело. В частности, этим телом может быть какой-нибудь участок стенок волновода. Бегущие (при данной частоте ω) собственные волны трубы пронормируем так, чтобы поток энергии через сечение трубы равнялся для всех нормированных волн единице. Внутри волновода на больших расстояниях от излучающего тела флуктуационное поле есть суперпозиция бегущих собственных волн с хаотическими амплитудными коэффициентами. Пусть a_m — амплитудный коэффициент волны m-го типа. Тогда, в силу выбранной нормировки собственных волн, мощность, уносимая волной m-го типа, равна

$$P_m = 4\overline{|a_m|^2}, \tag{10}$$

где множитель 4 (так же как и $c/2\pi$ вместо $c/8\pi$ в формуле (9)) стоит потому, что разложение флуктуационных величин в спектр производится в интервале $-\infty < \omega < \infty$ (см. [1]).

В качестве вспомогательного диффракционного поля возьмем поле, создаваемое единичной волной m-го типа, идущей от источника, находящегося на бесконечно удаленном конце волновода. На больших расстояниях от излучающего тела это поле состоит из падающей волны и расходящихся от тела бегущих волн разных типов.

Рассмотрим объем, содержащий излучающее тело и ограниченный идеально проводящим металлом стенок и достаточно удаленными поперечными сечениями трубы (двумя для бесконечного волновода, одним для полубесконечного). Так как источник диффракционного поля находится вне этого объема, то лемма Лоренца для флуктуационного и диффракционного полей запишется в виде

$$\oint \frac{c}{8\pi}([\mathbf{E}\mathbf{H}_{0m}] - [\mathbf{E}_{0m}\mathbf{H}])\,d\mathbf{S} = \int \frac{1}{2}\mathbf{E}_{0m}\mathbf{j}\,dV, \qquad (11)$$

причем, очевидно, интеграл в левой части можно брать только по поперечным сечениям трубы. Но на этих сечениях каждое поле есть суперпозиция собственных бегущих волн волновода, и поэтому интеграл разобьется на сумму интегралов, каждый из которых будет содержать некоторую комбинацию собственных волн. Если это волны разных типов, то соответствующий интеграл равен нулю в силу ортонормальности собственных волн трубы. Для волн одинакового типа, бегущих в одном и том же направлении, равно нулю подинтегральное выражение. Только для волн одного типа, бегущих в противоположных направлениях, этот интеграл отличен от нуля. Такой единственной комбинацией будет падающая единичная волна m-го типа и флуктуационная волна m-го типа с амплитудой a_m. Поэтому левая часть (11) равна $\pm 2a_m$ (знак зависит от направления падающей волны) и, следовательно,

$$2a_m = \pm\frac{1}{2}\int \mathbf{E}_{0m}\mathbf{j}\,dV.$$

Умножая это равенство на комплексно сопряженное и усредняя по ансамблю при помощи (1), будем иметь

$$P_m = 4\overline{|a_m|^2} = \frac{1}{4}\int \frac{\Theta}{\pi}\sigma\,|\mathbf{E}_{0m}|^2\,dV = \frac{1}{2\pi}\int \Theta\,dQ_{0m}.$$

Вводя по формуле (5) среднюю температуру $\tilde{\Theta}_m$ и замечая, что для единичной падающей волны тепловые потери $Q_{0m} = \int dQ_{0m}$ просто равны коэффициенту поглощения A_m, мы окончательно получим

$$P_m = \frac{1}{2\pi}\tilde{\Theta}_m A_m. \qquad (12)$$

Для того частного случая, когда излучающим телом является хорошо проводящая перегородка, формула (12) была получена С. М. Рытовым ([3]) прямым расчетом.

Поступило
22 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, М., 1953. [2] М. Л. Левин, ЖТФ, **21**, 795 (1951). [3] С. М. Рытов, ЖЭТФ, **27**, в. 10 (1954).