Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 6

ФИЗИКА

Н. П. КЛЕПИКОВ

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВАКУУМНОГО ФУНКЦИОНАЛА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 8 IX 1954)

В предыдущей заметке ([1]) была указана система уравнений в вариационных производных для функционала G_0, описывающего вакуум электронно-позитронного и электромагнитного полей, взаимодействующих между собой, и было приведено разложение решения этой системы по степеням заряда e. Указанная система уравнений может быть записана в виде

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} + iJ_\mu(x)\right\}G_0 = \frac{e}{2}\lim_{x'\to x}\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x')}\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} + \frac{\delta}{\delta\eta(x)}\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x')}\right)G_0; \qquad (1)$$

$$\left\{\left(-\tilde{\gamma}_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu} + m\right)\frac{\delta}{\delta\eta(x)} + i\bar{\eta}(x)\right\}G_0 = e\frac{\delta}{\delta J_\nu(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\gamma_\nu G_0; \qquad (2)$$

$$\left\{\left(\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu} + m\right)\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} - i\eta(x)\right\}G_0 = e\frac{\delta}{\delta J_\nu(x)}\gamma_\nu\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}G_0. \qquad (3)$$

Варьируя каждое из уравнений по соответствующему источнику и приравнивая пределы полусумм третьих смешанных производных, найдем

$$\lim_{x'\to x}\frac{\delta}{\delta J_\nu(x')}\left(iJ_\nu(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}\frac{\delta}{\delta J_\nu(x)}\right)G_0 =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x'\to x}\left\{-\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x')}\left[i\bar{\eta}(x) + \left(-\tilde{\gamma}_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu} + m\right)\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\left[i\bar{\eta}(x') + \left(-\tilde{\gamma}_\nu\frac{\partial}{\partial x'_\nu} + m\right)\frac{\delta}{\delta\eta(x')}\right]\right\}G_0 =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x'\to x}\left\{\frac{\delta}{\delta\eta(x')}\left[-i\eta(x) + \left(\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu} + m\right)\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{\delta}{\delta\eta(x)}\left[-i\eta(x') + \left(\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial x'_\nu} + m\right)\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x')}\right]\right\}G_0. \qquad (4)$$

Исследуем теперь возможность получить разложение G_0 по обратным степеням e. Нулевое приближение такого разложения должно обращать в нуль правые части уравнений (1)—(3) и, кроме того, удовлетворять соотношению (4) как условию совместности системы уравнений для определения следующего приближения. Ближайшее рассмотрение возникающей системы уравнений показывает, что она, повидимому, не имеет ненулевого решения. Это означало бы, что решение системы (1)—(3) не может быть разложено по степеням $1/e$.

К решению системы (1)—(3) можно подойти также при помощи аппарата функциональных интегралов, который начали применять в последнее время ([2], [3]). Если искать решение в виде функционального

интеграла типа Лапласа с линейной зависимостью показателя от всех трех источников, то такое решение находится элементарно и имеет вид

$$G_0 = \exp\Big\{-\tfrac{1}{2}\int J_\sigma(z)\,\tfrac{1}{2}\,D^F(z-t)\,J_\sigma(t)\,dz\,dt + \int\bar{\eta}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-t)\,\eta(t)\,dz\,dt\Big\}\times$$
$$\times\int\delta A\,\delta\bar{\xi}\delta\xi\,\exp\Big\{\tfrac{1}{2}\int[J_\sigma(z)+A_\sigma(z)]\,\tfrac{1}{2}\,D^F(z-t)\,[J_\sigma(t)+A_\sigma(t)]\,dz\,dt -$$
$$-\int[\bar{\eta}(z)-\bar{\xi}(z)]\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-t)\,[\eta(t)-\xi(t)]\,dz\,dt -$$
$$-ie\int\bar{\xi}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-u)\,\gamma_\nu\,\tfrac{1}{2}\,D^F(u-y)\,A_\nu(y)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(u-t)\,\xi(t)\,dz\,dt\,dy\,du\Big\}\times$$
$$\times\Big[\int\delta A\;\delta\bar{\xi}\,\delta\xi\,\exp\Big\{\tfrac{1}{2}\int A_\sigma(z)\,\tfrac{1}{2}\,D^F(z-t)\,A_\sigma(t)\,dz\,dt -$$
$$-\int\bar{\xi}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-t)\,\xi(t)\,dz\,dt -$$
$$-ie\int\bar{\xi}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-u)\,\gamma_\nu\,\tfrac{1}{2}\,D^F(u-y)\,A_\nu(y)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(u-t)\,\xi(t)\,dz\,dt\,dy\,du\Big\}\Big]^{-1}. \quad (5)$$

Интегрирование ведется таким образом, чтобы подинтегральный функционал исчезал на границах. Постоянный множитель выбран так, что $G_0 = 1$ при $J_\mu = \bar{\eta} = \eta = 0$.

Из (5) сейчас же находим

$$G(x,\,x') = \frac{1}{iG_0}\,\frac{\delta^2 G_0}{\delta\eta(x')\,\delta\bar{\eta}(x)}\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} =$$
$$=\int\delta A\,\delta\bar{\xi}\,\delta\xi\cdot\int\bar{\xi}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-x')\,dz\cdot\int\tfrac{1}{2}\,S^F(x-t)\,\xi(t)\,dt\times$$
$$\times\exp\Big\{\tfrac{1}{2}\int[J_\sigma(z)+A_\sigma(z)]\,\tfrac{1}{2}\,D^F(z-t)\,[J_\sigma(t)+A_\sigma(t)]\,dz\,dt -$$
$$-\int\bar{\xi}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-t)\,\xi(t)\,dz\,dt -$$
$$-ie\int\bar{\xi}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-u)\,\gamma_\nu\,\tfrac{1}{2}\,D^F(u-y)\,A_\nu(y)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(u-t)\,\xi(t)\,dz\,dt\,dy\,du\Big\}\times$$
$$\times\Big[\int\delta A\,\delta\bar{\xi}\delta\xi\,\exp\Big\{\tfrac{1}{2}\int\Big[J_\sigma(z)+A_\sigma(z)\Big]\,\tfrac{1}{2}\,D^F(z-t)\,\Big[J_\sigma(t)+A_\sigma(t)\Big]\,dz\,dt -$$
$$-\int\bar{\xi}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-t)\,\xi(t)\,dz\,dt -$$
$$-ie\int\bar{\xi}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-u)\,\gamma_\nu\,\tfrac{1}{2}\,D^F(u-y)\,A_\nu(y)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(u-t)\,\xi(t)\,dz\,dt\,dy\,du\Big\}\Big]^{-1}, \quad (6)$$

$$\langle A_\mu(x)\rangle = \frac{1}{iG_0}\,\frac{\delta G_0}{\delta J_\mu(x)}\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} =$$
$$=\int\delta A\,\delta\bar{\xi}\,\delta\xi\cdot\int A_\mu(z)\,\tfrac{1}{2}\,D^F(z-x)\,dz\times$$
$$\times\exp\Big\{\tfrac{1}{2}\int\Big[J_\sigma(z)+A_\sigma(z)\Big]\,\tfrac{1}{2}\,D^F(z-t)\,\Big[J_\sigma(t)+A_\sigma(t)\Big]\,dz\,dt -$$
$$-\int\bar{\xi}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-t)\,\xi(t)\,dz\,dt -$$
$$-ie\int\bar{\xi}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-u)\,\gamma_\nu\,\tfrac{1}{2}\,D^F(u-y)\,A_\nu(y)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(u-t)\,\xi(t)\,dz\,dt\,dy\,du\Big\}\times$$
$$\times\Big[\int\delta A\,\delta\bar{\xi}\,\delta\xi\,\exp\Big\{\tfrac{1}{2}\int\Big[J_\sigma(z)+A_\sigma(z)\Big]\,\tfrac{1}{2}\,D^F(z-t)\,\Big[J_\sigma(t)+A_\sigma(t)\Big]\,dz\,dt -$$
$$-\int\bar{\xi}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-t)\,\xi(t)\,dz\,dt -$$
$$-ie\int\bar{\xi}(z)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(z-u)\,\gamma_\nu\,\tfrac{1}{2}\,D^F(u-y)\,A_\nu(y)\,\tfrac{1}{2}\,S^F(u-t)\,\xi(t)\,dz\,dt\,dy\,du\Big\}\Big]^{-1}. \quad (7)$$

Функционалы (6) и (7) дают решение уравнений Швингера.

Система (1) — (3) имеет также решение в виде более простого функционального интеграла

$$G_0 = C\int \delta A \exp\left\{\int J_\sigma(z)\,{}^1\!/_2 D^F(z-t) J_\sigma(t) dz dt + \int \bar{\eta}(z) F(z,t;A)\eta(t) dz dt + \Phi[A]\right\}, \quad (8)$$

если существуют такие функционалы $F(z,t;A)$ и $\Phi[A]$, что

$$\left(-\tilde{\gamma}_\sigma \frac{\partial}{\partial y_\sigma} + m\right) F(x,y) - eF(x,y)\gamma_\nu \int {}^1\!/_2 D^F(y-t) A_\nu(t)\, dt = i\delta(x-y), \quad (9)$$

$$\left(\tilde{\gamma}_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma} + m\right) F(x,y) - e\gamma_\nu \int {}^1\!/_2 D^F(x-t) A_\nu(t)\, dt \cdot F(x,y) = i\delta(x-y), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_\sigma^2} \frac{\delta F(x,y)}{\delta A_\mu(z)} = -eF(x,z)\gamma_\mu F(z,y), \quad (11)$$

$$\frac{\delta \Phi}{\delta A_\mu(x)} = \int {}^1\!/_2 D^F(x-t) A_\mu(t)\, dt +$$

$$+ ie \int {}^1\!/_2 D^F(x-t)\, {}^1\!/_2 \lim_{t' \to t} \operatorname{tr} \gamma_\mu (F(t',t) + F(t,t'))\, dt. \quad (12)$$

Функционал $F(x,y)$ есть функция Грина для одного электрона в заданном внешнем электромагнитном поле. Легко найти для него и для функционала Ф решения в виде рядов по степеням e, но, во-первых, введение таких рядов противоречит исходной цели избежать применение рядов, а во-вторых, разложение для Ф содержит один расходящийся член. Рассмотрение возможности представления решения системы (9) — (12) в замкнутом и конечном виде явится предметом дальнейших исследований.

После того как настоящая статья была закончена, нам стала известна работа ([4]), в которой для случая мезодинамики проведено вычисление, близкое к содержанию ([1]) и настоящей статьи (см. также ([5], [6])).

Автор выражает свою благодарность проф. И. М. Гельфанду и Р. А. Минлосу за обсуждение работы, в ходе которого было выяснено, что они также рассматривали ряд вопросов, изложенных в ([1]) и в настоящей статье, и пришли к близким выводам.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. П. Клепиков, ДАН, **98**, 937 (1954). [2] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, ДАН, **97**, 209 (1954). [3] S. F. Edwards, R. E. Peierls, Proc. Roy. Soc., **224**, 24 (1954). [4] Е. С. Фрадкин, ДАН, **98**, 47 (1954). [5] P. T. Matthews, A. Salam, N. Cim., **12**, 563 (1954). [6] K. Symanzik, Zs. Naturforsch., **9a**, 809 (1954).