Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. С. АРЖАНЫХ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 20 XII 1954)

Предварительно установим для теории поля формулу, которая является естественным распространением на динамический случай ранее построенной (1) интегральной формулы.

Будем считать вектор $\mathbf{V}$, удовлетворяющий уравнениям теории поля $\operatorname{rot}\mathbf{V}=\vec{\Omega}$, $\operatorname{div}\mathbf{V}=0$, правильным для внутренних задач и регулярным для внешних задач в смысле теории ньютоновских потенциалов (2). Нормаль $\mathbf{n}$ к неподвижной граничной поверхности S направим вне области $Q+S$. Результат подстановки вместо t запаздывающего значения $t-r/a$ обозначим при помощи квадратной скобки, а дифференцирование по t обозначим буквой ∂.

Лемма. *Вектор поля удовлетворяет уравнению*

$$4\pi\,\mathbf{V}(p,t)=\frac{1}{a^2}\int\frac{[\partial^2\mathbf{V}]}{r(p,q)}\,dQ+\operatorname{grad}f-\operatorname{rot}\mathbf{g},\tag{1}$$

$$f=\oint\frac{\mathbf{n}[\mathbf{V}]}{r(p,s)}\,dS-\int\frac{[\vartheta]}{r}\,dQ,\qquad \mathbf{g}=\oint\frac{\mathbf{n}\times[\mathbf{V}]}{r(p,s)}\,dS-\int\frac{[\vec{\Omega}]}{r}\,dQ.$$

Действительно, выполним преобразование Лапласа с параметром λa, и пусть $\mathbf{v}\parallel\mathbf{V}$, $\vec{\omega}\parallel\vec{\Omega}$, $\vartheta\parallel\vartheta$, $\varkappa=\frac{1}{r}\exp(-\lambda r)$. Тогда при помощи вычислений, указанных в работе (1), получим

$$4\pi\mathbf{v}=\lambda^2\int\varkappa\mathbf{v}\,dQ+\operatorname{grad}\varphi-\operatorname{rot}\vec{\psi},\tag{2}$$

$$\varphi=\oint\varkappa\mathbf{n}\mathbf{v}\,dS-\int\varkappa\vartheta\,dQ,\qquad \vec{\psi}=\oint\varkappa\mathbf{n}\times\mathbf{v}\,dS-\int\varkappa\vec{\omega}\,dQ.$$

Возвращаясь к оригиналам, получим формулу (1) (в силу теоремы запаздывания).

Как было показано (1), формула (2) и, следовательно, (1) находят многочисленные применения в теории упругости, гидродинамике и электродинамике. Здесь мы рассмотрим два вопроса электродинамики, связанных с указанной формулой: 1) граничные задачи, рассмотренные ранее (1) при помощи операционного исчисления, и 2) уравнения движения электронного газа.

§ 1. Пусть электромагнитное поле определяется уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\varepsilon}{c}\,\partial\mathbf{E},\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0;\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu}{c}\,\partial\mathbf{H},\quad \operatorname{div}\mathbf{E}=0.\tag{3}$$

Использование формулы (1) и легко проверяемого тождества

$$\frac{1}{r(p,q)}\,\Lambda_q[\mathbf{a}(q,t)]=\Lambda_q\frac{[\mathbf{a}]}{r}+\Lambda_p\frac{[\mathbf{a}]}{r},\tag{4}$$

где Λ_q — линейный оператор дифференцирования первого порядка по координатам точки q, приводит к следующему представлению электромагнитного поля:

$$4\pi\mathbf{E} = \frac{\mu}{c}\iint \frac{\mathbf{n}\times[\partial\mathbf{H}]}{r(p,s)}dS + \nabla\iint\frac{\mathbf{n}[\mathbf{E}]}{r}dS - \nabla\times\iint\frac{\mathbf{n}\times[\mathbf{E}]}{r}dS, \tag{5}$$

$$4\pi\mathbf{H} = -\frac{\varepsilon}{c}\iint \frac{\mathbf{n}\times[\partial\mathbf{E}]}{r(p,s)}dS + \nabla\iint\frac{\mathbf{n}[\mathbf{H}]}{r}dS - \nabla\times\iint\frac{\mathbf{n}\times[\mathbf{H}]}{r}dS, \tag{6}$$

причем $a = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Для изображений векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (в более общем случае) подобные формулы содержат объемные интегралы (см. формулы (26) — (29) работы [1]).

Для вычислений по формулам (5) и (6) необходимо знать все граничные элементы

$$\xi = \mathbf{nE}, \quad \eta = \mathbf{nH}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{n}\times\mathbf{E}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{n}\times\mathbf{H}. \tag{7}$$

Однако в краевых задачах заданы только некоторые из них. Поэтому возникает задача о вычислении недостающих элементов. Для этой цели можно использовать также формулы (5) и (6).

Будем предполагать, что существуют прямые значения первых производных в точках граничной поверхности ньютоновских потенциалов простого слоя, имеющих плотности (7), а в отношении зависимости по времени предполагаем применимость формулы конечных приращений для этих плотностей. Введем следующие операторы:

$$\begin{gathered}
a_t^{s_0 s}(\xi) \equiv \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n(s_0)}\left(1+\frac{r}{a}\partial\right)[\xi(s,t)],\\
b_t^{s_0 s}(\mathbf{e}) \equiv \mathbf{n}(s_0)\times\nabla_{s_0}\frac{1}{r}\times\left(1+\frac{r}{a}\partial\right)[\mathbf{e}(s,t)],\\
c_t^{s_0 s}(\mathbf{e}) \equiv \frac{1}{r}\mathbf{n}(s_0)[\partial\mathbf{e}(s,t)], \quad d_t^{s_0 s}(\mathbf{e}) \equiv \frac{1}{r}\mathbf{n}(s_0)\times[\partial\mathbf{e}(s,t)].
\end{gathered} \tag{8}$$

Тогда для недостающих граничных элементов краевых задач получим следующие интегрально-дифференциальные уравнения в запаздывающих аргументах по времени.

Первая задача (даны ξ и η). Для определения векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ имеем уравнения

$$\begin{aligned}
2\pi\mathbf{e}(s_0,t) &= \mathbf{e}_1 + \frac{\mu}{c}\iint d_t^{s_0 s}(\mathbf{h})\,dS - \iint b_t^{s_0 s}(\mathbf{e})\,dS,\\
2\pi\mathbf{h}(s_0,t) &= \mathbf{h}_1 - \frac{\varepsilon}{c}\iint d_t^{s_0 s}(\mathbf{e})\,dS - \iint b_t^{s_0 s}(\mathbf{h})\,dS,
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}_0\times\lim_{p\to s_0}\nabla_p\iint\frac{[\xi]}{r}dS, \quad \mathbf{h}_1 = \mathbf{n}_0\times\lim_{p\to s_0}\nabla_p\iint\frac{[\eta]}{r}dS. \tag{10}$$

Вторая задача (даны ξ и $\mathbf{h}$). $\mathbf{e}$ и η удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
2\pi\mathbf{e}(s_0,t) &= \mathbf{e}_2 - \iint b_t^{s_0 s}(\mathbf{e})\,dS,\\
2\pi\eta(s_0,t) &= \eta_1 - \frac{\varepsilon}{c}\iint c_t^{s_0 s}(\mathbf{e})\,dS + \iint a_t^{s_0 s}(\eta)\,dS,
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \frac{\mu}{c}\iint d_t^{s_0 s}(\mathbf{h})\,dS, \quad \eta_1 = -\mathbf{n}_0\lim_{p\to s_0}\nabla_p\times\iint\frac{[\mathbf{h}]}{r}dS. \tag{12}$$

Третья задача (даны $\mathbf{e}$ и η). $\mathbf{h}$ и ξ удовлетворяют уравнениям

$$2\pi\mathbf{h}(s_0, t) = \mathbf{h}_2 - \oint b_t^{s_0 s}(\mathbf{h})\, dS,$$
$$2\pi\xi(s_0, t) = \xi_1 + \frac{\mu}{c}\oint c_t^{s_0 s}(\mathbf{h})\, dS + \oint a_t^{s_0 s}(\xi)\, dS, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1 - \frac{\varepsilon}{c}\oint d_t^{s_0 s}(\mathbf{e})\, dS, \quad \xi_1 = -\mathbf{n}_0 \lim_{p\to s_0} \nabla_p \times \oint \frac{[\mathbf{e}]}{r} dS. \tag{14}$$

Четвертая задача (даны $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$). Эта задача решается в замкнутом виде, если даны также начальные значения (при $t = 0$) нормальных проекций векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В самом деле, касательные проекции поля E_k и H_k, $k = 1, 2$, известны. Поэтому из уравнений Максвелла согласно условию разрешимости первой задачи теории поля [3] находим нормальные составляющие

$$\xi = \xi_0 + \frac{c}{\varepsilon g_1 g_2}\int_0^t \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial}{\partial\alpha_2} \\ g_1 H_1 & g_2 H_2 \end{vmatrix} dt, \quad \eta = \eta_0 - \frac{c}{\mu g_1 g_2}\int_0^t \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial}{\partial\alpha_2} \\ g_1 E_1 & g_2 E_2 \end{vmatrix} dt, \tag{15}$$

где g_k — метрические коэффициенты граничной поверхности.

§ 2. Уравнения движения электронного газа в вакууме имеют вид

$$\rho\mathbf{w} = -\operatorname{grad} P + \gamma\left(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H})\right), \tag{16}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \operatorname{div}\gamma\mathbf{v} = 0. \tag{17}$$

Внешнее поле $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ предполагается заданным, а собственное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла — Лоренца

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\partial\mathbf{E} + \frac{\gamma}{c}\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0; \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\partial\mathbf{H}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = \gamma. \tag{18}$$

При помощи формулы (1) эти уравнения легко интегрируются:

$$4\pi\mathbf{H} = -\frac{1}{c}\oint\frac{[\partial\mathbf{e}]}{r}dS + \nabla\oint\frac{[\eta]}{r}dS - \nabla\times\left(\oint\frac{[\mathbf{h}]}{r}dS - \frac{1}{c}\int\frac{[\gamma\mathbf{v}]}{r}dQ\right),$$
$$4\pi\mathbf{E} = \frac{1}{c}\oint\frac{[\partial\mathbf{h}]}{r}dS + \nabla\left(\oint\frac{[\xi]}{r}dS - \int\frac{[\gamma]}{r}dQ\right) -$$
$$-\nabla\times\oint\frac{[\mathbf{e}]}{r}dS - \frac{1}{c^2}\int\frac{1}{r}[\partial(\gamma\mathbf{v})]dQ. \tag{19}$$

Будем считать, что движение происходит достаточно медленно ($v^2/c^2 \cong 0$) и что плотность электрических зарядов γ достаточно мала по сравнению с массовой плотностью ρ ($\gamma^2/\rho^2 \cong 0$). Тогда при подстановке собственного поля в уравнения движения можно отбросить все объемные интегралы

$$\frac{\gamma}{\rho}\nabla\int\frac{[\gamma]}{r}dQ, \quad \frac{\gamma}{\rho c^2}\int\frac{1}{r}[\partial(\gamma\mathbf{v})]\,dQ, \quad \frac{\gamma\mathbf{v}}{\rho c^2}\times\nabla\times\int\frac{[\gamma\mathbf{v}]}{r}dQ. \tag{20}$$

Следовательно, поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ определяется только граничными элементами. Если обозначим через $\mathbf{E}_*$, $\mathbf{H}_*$ суммарное поле, то получим следующие уравнения движения:

$$\partial\mathbf{v} + \left(\operatorname{rot}\mathbf{v} + \frac{\gamma}{\rho c}\mathbf{H}_*\right)\times\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\left(\gamma\mathbf{E}_* - \operatorname{grad}\left(P + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)\right). \tag{21}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда ρ и γ постоянны. Представим суммарное поле через скалярный и векторный потенциалы

$$\mathbf{E}_* = -\frac{1}{c}\partial\mathbf{A} + \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{H}_* = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{22}$$

Тогда для вектора скорости $\mathbf{v} = -\frac{\gamma}{\rho c}\mathbf{A} + \operatorname{grad}\Phi$ получим интеграл Коши, а из уравнения неразрывности найдем потенциал Φ. Для установившегося движения существует решение вида

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} - \frac{\gamma}{\rho c}\operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{23}$$

Для внутренней задачи можно положить $\lambda = \text{const}$, $v_n = 0$. Применяя построение вектора $\mathbf{v}$, указанное в лемме работы ([3]), получим нагруженное интегральное уравнение для этого вектора. Если же использовать теорему 2 работы ([1]), то получим интегральное уравнение типа Фредгольма для вектора скорости. В первом случае используется функция Грина проблемы Неймана, а во втором проблемы Дирихле.

Институт математики и механики
им. В. И. Романовского
Академии наук Уз.ССР

Поступило
12 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Аржаных, ДАН, **85**, № 1 (1952). [2] Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, М., 1946. [3] И. С. Аржаных, ДАН, **79**, № 1 (1951).