Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 6

МАТЕМАТИКА

В. Е. ШАМАНСКИЙ

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 1 XII 1954)

1. Предлагаемый метод основан на возможности представления заданной области в виде суммы областей, для каждой из которых фактическое решение задачи Дирихле не представляет особых трудностей. Построение приближенного решения этим методом сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Метод «склеивания» решений в другом виде применялся в работах ([1], [2]).

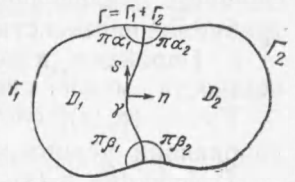


Рис. 1

2. Пусть D — конечная односвязная область плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, ограниченная кусочно-гладким контуром Γ. Рассмотрим для простоты только случай, когда D можно разбить на две подобласти D_1, D_2 гладкой дугой γ, концы которой принадлежат Γ (см. рис. 1). Случай разбиения исходной области D на несколько подобластей исследуется аналогично.

Отметим два вспомогательных факта.

I. *Если функции* $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ *удовлетворяют условиям:*

1) *они гармоничны, соответственно, в областях* D_1, D_2;

2) *на каждой замкнутой дуге* $\gamma_1 \subset \gamma$

$$|\varphi_1(s+\Delta s)-\varphi_1(s)| \leqslant K(\gamma_1)|\Delta s|^{\alpha} \quad (0<\alpha\leqslant 1)$$

и

$$\varphi_1(s)=\varphi_2(s)\ *;$$

3) *почти всюду на* γ (*т. е. за исключением множества точек меры нуль*)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\ **,$$

то $\varphi_2(x, y)$ *является аналитическим продолжением функции* $\varphi_1(x, y)$ *в область* D_2.

Пусть краевое условие задачи Дирихле задано функцией $\beta(s)$, непрерывной на Γ, причем $\beta(s)=\beta(s+L)$, где L — длина Γ. Обозначим через $\Phi^*(x, y)$ гармоническую в D функцию, принимающую на Γ значение $\beta(s)$. Пусть $\Phi(x, y)$ — непрерывная в D функция, принимающая на Γ значение $\beta(s)$. Под $\partial\Phi^-/\partial n$, $\partial\Phi^+/\partial n$ будем понимать, соответственно, левое и правое *** предельные значения нормальной производной функции $\Phi(x, y)$ на γ. Введем в рассмотрение функцию $\alpha(s)=\frac{\partial\Phi^-}{\partial n}-\frac{\partial\Phi^+}{\partial n}$.

* s — дуговая координата точек соответствующей кривой.

** $d\varphi_1/dn$, $d\varphi_2/dn$ — предельные значения производных, взятых по направлению нормали к γ.

*** Относительно положительного направления на γ.

Тогда имеет место следующее предложение:

II. *Если* $\Phi(x, y)$ *удовлетворяет условиям*:

1) *она гармонична в* D_1 *и* D_2;

2) *на каждой замкнутой дуге* $\gamma_1 \subset \gamma$

$$|\Phi(s+\Delta s)-\Phi(s)| \leqslant A(\gamma_1)|\Delta s|^{\delta} \quad (0<\delta\leqslant 1);$$

3) $\alpha(s)$ *интегрируема с квадратом на* γ,

то

$$|\Phi^*(x, y)-\Phi(x, y)| \leqslant M\left(\int_\gamma \alpha^2(s)\,ds\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где

$$M=\frac{1}{\pi}\left(\max \int_\gamma \ln^2|z-z(s)|\,ds\right)^{1/2} \quad \textit{при } z\in\Gamma+\gamma.$$

Для доказательства последнего утверждения вводим гармоническую в D функцию

$$\mu(x, y)=\Phi(x, y)-\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \alpha(s)\ln|z-z(s)|\,ds.$$

Оценивая отклонение $\mu(x, y)$ от $\Phi^*(x, y)$ и $\mu(x, y)$ от $\Phi(x, y)$, получим требуемое неравенство.

3. Перейдем к конструкции приближенного решения. Не умаляя общности, можно считать $\beta(s_1)=\beta(s_2)=0$ *.

Пусть $\{\varphi_k(s)\}$ система линейно независимых функций на γ, удовлетворяющих условиям:

1) функции $\varphi_k(s)$ достаточное число раз дифференцируемы на γ;

2) $\varphi_k(s_1)=\varphi_k(s_2)=0$;

3) если $P_n(s)=\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(s)$, то можно найти такую последовательность $\{P_n(s)\}$ для каждой непрерывно дифференцируемой на открытой дуге γ функции $f(s)$, что почти всюду на γ будет

$$\lim_{n\to\infty}|f'(s)-P_n'(s)|=0.$$

Под $P_n(s)$ можно понимать, например, алгебраический или тригонометрический полином.

Построим гармонические, соответственно, в D_1, D_2 функции $\Phi_{1n}(x, y)$, $\Phi_{2n}(x, y)$ по краевым условиям:

$$\Phi_{1n}(x, y)=\begin{cases}\beta(s) \text{ на } \Gamma_1;\\ P_n(s) \text{ на } \gamma;\end{cases} \qquad \Phi_{2n}(x, y)=\begin{cases}\beta(s) \text{ на } \Gamma_2;\\ P_n(s) \text{ на } \gamma.\end{cases}$$

Функции $\Phi_{1n}(x, y)$, $\Phi_{2n}(x, y)$ можно представить в виде:

$$\Phi_{1n}(x, y)=\sum_{k=1}^{n} c_k\Phi_{1n}^{(k)}(x, y), \qquad \Phi_{2n}(x, y)=\sum_{k=1}^{n} c_k\Phi_{2n}^{(k)}(x, y), \tag{2}$$

где $c_0=1$, а $\Phi_{1n}^{(k)}(x, y)$, $\Phi_{2n}^{(k)}(x, y)$ — гармонические, соответственно, в областях D_1, D_2 функции, принимающие следующие значения на границе:

$$\Phi_{1n}^{(0)}(x, y)=\begin{cases}\beta(s) \text{ на } \Gamma_1;\\ 0 \text{ на } \gamma;\end{cases} \qquad \Phi_{2n}^{(0)}(x, y)=\begin{cases}\beta(s) \text{ на } \Gamma_2;\\ 0 \text{ на } \gamma;\end{cases}$$

$$\Phi_{1n}^{(k)}(x, y)=\begin{cases}0 \text{ на } \Gamma_1;\\ \varphi_k(s) \text{ на } \gamma;\end{cases} \qquad \Phi_{2n}^{(k)}(x, y)=\begin{cases}0 \text{ на } \Gamma_2;\\ \varphi_k(s) \text{ на } \gamma.\end{cases}$$

* s_1, s_2 — дуговые координаты концов дуги γ.

Из (2) получаем

$$\int_\gamma \alpha_n^2(s)\,ds = \int_\gamma \left(\frac{\partial \Phi_{1n}}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_{2n}}{\partial n}\right)^2 ds = \sum_{k,m=0}^{n} c_k c_m (\delta_k, \delta_m), \tag{3}$$

где

$$(\delta_k, \delta_m) = \int_\gamma \left(\frac{\partial \Phi_{1n}^{(k)}}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_{2n}^{(k)}}{\partial n}\right)\left(\frac{\partial \Phi_{1n}^{(m)}}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_{2n}^{(m)}}{\partial n}\right) ds.$$

Определим теперь постоянные c_k так, чтобы интеграл (3), представляющий собой положительно-определенную квадратическую форму от c_k, обратился в минимум. Минимум интеграла (3) реализуют постоянные a_k, являющиеся решением системы n линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (\delta_k, \delta_m) = -(\delta_0, \delta_m) \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Матрица коэффициентов системы, очевидно, симметрична, определитель положителен (исключая тривиальный случай).

Приближенное решение задачи Дирихле запишется в виде

$$\Phi_n(x, y) = \begin{cases} \Phi_{1n}(x, y), & \text{если } z \in D_1; \\ \Phi_{2n}(x, y), & \text{если } z \in D_2, \end{cases}$$

где $\Phi_n(x, y)$ — непрерывная в D функция, гармоническая в D_1, D_2 и принимающая на Γ значение $\beta(s)$. Оценка погрешности приближенного решения дается неравенством (1).

4. Остается выяснить вопрос, можно ли этим способом построить приближенное решение, сколь угодно мало отличающееся от точного. Предположим дополнительно, что дуга γ и дуги Γ_1, Γ_2 вблизи точек пересечения γ с Γ имеют ограниченную кривизну. Пусть $\pi\alpha_k$, $\pi\beta_k$ $(k=1, 2)$ — величины углов между γ и Γ в тех же точках пересечения и $\max\{\alpha_k, \beta_k\} \leqslant 1$. Введем обозначения $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$. Тогда справедливо следующее:

III. *Если существует такая последовательность* $\left\{P_n(s) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(s)\right\}$, *что для функций* $\{\overline{\Phi}_n(x, y)\}$, *непрерывных в* D, *гармонических в* D_1, D_2 *и принимающих на* Γ *значение* $\beta(s)$, *а на* γ *— значение* $P_n(s)$, *будут выполнены условия*:

1) *почти всюду на* γ

$$\lim_{n\to\infty} |\Phi'^{*}(s) - \overline{\Phi}_n'(s)| = \lim_{n\to\infty} |\Phi'^{*}(s) - P_n'(s)| = 0; \tag{4}$$

2)

$$\int_\gamma [\Phi'^{*}(s) - \Phi_n'(s)]^{2p} |s - s_1|^{(1-1/\alpha)p} |s - s_2|^{(1-1/\beta)p} ds < M < \infty \tag{5}$$

для всех n *при некотором* $p > 1$,
то

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma \left(\frac{\partial \overline{\Phi}_n^{+}}{\partial n} - \frac{\partial \overline{\Phi}_n^{-}}{\partial n}\right)^2 ds = 0. \tag{6}$$

Доказательство опирается на неравенство Рисса [3] и на возможность представления функции, конформно отображающей односвязную область G, ограниченную кусочно-гладким контуром Δ, на круг $|\zeta| < 1$, в виде

$$\zeta = \chi(z) = \int_{z_0}^{z} e^{\lambda(t)} \prod_{k=1}^{m} (t - z_k)^{1/\alpha_k - 1}\, dt.$$

Здесь z_k — комплексные координаты угловых точек; $\pi\alpha_k$ — соответствующие им величины внутренних углов; z_0 — внутренняя точка области G; $\lambda(z)$ — некоторая непрерывная в $G + \Delta$ и регулярная в G функция; предполагается, кроме того, что участки гладкости контура Δ имеют ограниченную кривизну.

Из (1) и (6) следует, что равномерно в $G + \Gamma$

$$\lim_{n\to\infty} |\Phi^*(x, y) - \Phi_n(x, y)| = 0,$$

так как постоянные a_k реализуют минимум интеграла вида (6). Заметим, что возможность выполнения условия (5) зависит только от свойств контура Γ, дуги γ и функции $\beta(s)$ вблизи точек пересечения Γ с γ. Приведем один достаточный признак выполнения условий (4), (5).

IV. *Если кривизна контура* Γ, *дуги* γ *и* $\beta''(s)$ *удовлетворяют условию Гельдера по* s *вблизи точек пересечения* Γ *с* γ, *а* $P_n(s)$ — *алгебраический или тригонометрический полином, то при* $^1/_4 < \alpha < {}^3/_4$, $^1/_4 < \beta < {}^3/_4$ *условия* (4), (5) *могут быть выполнены, а следовательно, равномерно в* $D + \Gamma$

$$\lim_{n\to\infty} |\Phi^*(x, y) - \Phi_n(x, y)| = 0.$$

Можно получить достаточные признаки выполнения условия (5) и в случае, когда точки пересечения Γ с γ угловые для контура Γ, $\beta(s)$ должна иметь в этих точках нуль определенного порядка.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
25 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Прикладн. матем. и мех., 6, № 1, 31 (1942). [2] Н. Н. Павловский, Гидромеханический расчет плотин системы Сенкова, 1937. [3] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.