Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 6

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ФИЛИППОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 XII 1954)

Для приближенного вычисления решения дифференциального уравнения часто заменяют последнее разностным уравнением. В этой заметке будет доказано, что если: 1) решение дифференциального уравнения существует; 2) разностное уравнение аппроксимирует дифференциальное уравнение; 3) решение разностного уравнения устойчиво, то при измельчении сетки решение разностного уравнения стремится к решению дифференциального уравнения. Это утверждение справедливо для любых типов уравнений с любыми граничными условиями. При этом под устойчивостью понимается равномерно непрерывная (при измельчении сетки) зависимость решения разностного уравнения от правой части и от граничных условий. Данное здесь определение в основном охватывает все, что понимается под устойчивостью в [1-4].

Пусть в области D с границей Γ дано дифференциальное уравнение

$$Lu = f \tag{1}$$

и граничные условия

$$l_i(u) = \varphi_i \text{ на } \Gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{2}$$

где Γ_i — заданные части границы Γ, различные Γ_i могут иметь общие куски. В области D для любого h ($0 < h < h_0$ или $h = h_1, h_2, \ldots \to 0$) определена сетка D_h, т. е. множество из конечного числа точек. Пусть R_h — разностный оператор, т. е. любую функцию u_h, определенную на сетке D_h, он переводит в функцию $R_h u_h$, определенную на D_h^0, где D_h^0 — часть D_h, причем в любой окрестности любой точки области D найдутся точки, принадлежащие D_h^0 при достаточно малом h. Рассмотрим разностное уравнение в области D_h

$$R_h u_h = f, \tag{3}$$

правая часть которого определена на D_h^0 и равна там правой части уравнения (1), и граничные условия

$$r_{hi}(u_h) = [\varphi_i]_h \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{4}$$

Каждое из s граничных условий (4) состоит из конечного числа равенств, связывающих значения функции u_h в некоторых точках сетки D_h. Множество тех точек сетки D_h, которые входят в i-е условие из (4), обозначим Γ_{hi}. Если какие-либо точки Γ_{hi} лежат на Γ_i, то проще всего положить в этих точках $[\varphi_i]_h = \varphi_i$; в общем случае $[\ ]_h$ — оператор, преобразующий функцию φ_i, заданную на Γ_i, в $[\varphi_i]_h$, заданную на Γ_{hi}^0, где Γ_{hi}^0 — часть Γ_{hi}.

Пусть для функций u_h, заданных на D_h, определена норма $\|u_h\|_{Ah}$; для f, заданных на D_h^0, — норма $\|f\|_{Bh}$; для φ_i, заданных на Γ_{hi}^0, — норма $\|\varphi_i\|_{Chi}$ ($i = 1, 2, \ldots, s$). Если функция u (или f) определена в D (а не только на D_h), то нормы $\|u\|_{Ah}$, $\|f\|_{Bh}$ сохраняют смысл, если учитывать только значения u в точках сетки D_h. (Если некоторые точки

сетки D_h лежат вне D, то должен быть указан способ доопределения u в этих точках, подробнее на этом не останавливаемся.)

Пусть K — класс функций, определенных в области D, причем если $u \in K$, то выражения Lu в D и $l_i(u)$ на Γ_i имеют смысл; кроме того можно наложить еще какие угодно ограничения, например потребовать, чтобы функции класса K имели непрерывные производные порядка p. Пусть P и Q_i — классы функций, определенных, соответственно, в D и на Γ_i, причем, если $u \in K$, то $Lu \in P$, $l_i(u) \in Q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Пусть для функций $u \in K$, $f \in P$, $\varphi_i \in Q_i$ определены нормы $\|u\|_A$, $\|f\|_B$, $\|\varphi_i\|_{Ci}$, причем при $h \to 0$

$$\|u\|_{Ah} \to \|u\|_A, \quad \|f\|_{Bh} \to \|f\|_B, \quad \|[\varphi_i]_h\|_{Chi} \to \|\varphi_i\|_{Ci}. \tag{5}$$

Пример 1. D_h — множество точек $t = mh$, $x = nh_1$ $(m = 0, 1, \ldots, M$, $n = 0, 1, \ldots, N$, $M = a/h$, $N = b/h_1)$; Γ_{h1} состоит из тех точек D_h, где $t = 0$; $\Gamma^0_{h1} = \Gamma_{h1}$; $r_{h1}(u) = u$; $[\varphi_1]_h = \varphi_1$; $\|u\|_{Ah} = hh_1 \sum\limits_m \sum\limits_n |u(mh, nh_1)|$;

$$\|[\varphi]_h\|_{Ch1} = \left(h_1 \sum_{n=0}^{N} |\varphi(nh_1)|^2 + \frac{1}{h_1} \sum_{n=1}^{N} |\varphi(nh_1) - \varphi((n-1)h_1)|^2\right)^{1/2};$$

при $h \to 0$ $h_1 = h_1(h) \to 0$; $\|u\|_{Ah} \to \int\limits_0^b \int\limits_0^a |u|\, dt\, dx = \|u\|_A$; $\|[\varphi]_h\|_{Ch1} \to$

$$\to \left(\int_0^b \left(|\varphi|^2 + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2\right) dx\right)^{1/2} = \|\varphi\|_{C1}.$$

Будем говорить, что уравнение (3) и граничные условия (4) аппроксимируют уравнение (1) и граничные условия (2) на классе функций K, если для любой функции $u \in K$

$$\|Lu - R_h u\|_{Bh} \leqslant \beta(h) M, \tag{6}$$

$$\|[l_i(u)]_h - r_{hi}(u)\|_{Chi} \leqslant \gamma(h) M_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{7}$$

$\beta(h) \to 0$; $\gamma(h) \to 0$ при $h \to 0$; M и M_i зависят только от u, но не от h.

Определение устойчивости. Уравнение (3) с граничными условиями (4) называется устойчивым, если при достаточно малых h решение существует и непрерывно зависит от правой части уравнения и граничных условий (равномерно по h), точнее, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ (не зависящее от h), что для данного u_h, удовлетворяющего (3) и (4), и любого такого $\tilde{u}_h$, что

$$\|R_h u_h - R_h \tilde{u}_h\|_{Bh} < \delta, \tag{8}$$

$$\|r_{hi}(u_h) - r_{hi}(\tilde{u}_h)\|_{Chi} < \delta \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{9}$$

при любом h $(0 < h < h_0)$ выполняется неравенство

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{Ah} < \varepsilon. \tag{10}$$

Уравнение (3) с граничными условиями (4) называется устойчивым по правой части (соответственно, по граничным условиям), если (10) выполняется для любых $\tilde{u}_h$, удовлетворяющих (8) и условию $r_{hi}(\tilde{u}_h) = r_{hi}(u_h)$ (соответственно (9) и $R_h \tilde{u}_h = R_h u_h$).

Если уравнение (3) и граничные условия (4) линейны, то приведенное выше определение устойчивости равносильно следующему: уравнение (3) с граничными условиями (4) называется устойчивым, если его решение существует при любых f, φ_i и $h < h_0$, причем

$$\|u_h\|_{Ah} \leqslant N\left(\|f\|_{Bh} + \sum_{i=1}^{s} \|[\varphi_i]_h\|_{Chi}\right), \tag{11}$$

где N не зависит от f, φ_i и h.

Основная теорема. *Если:* 1) *решение дифференциального уравнения* (1) *с граничными условиями* (2) *существует и принадлежит* K; 2) *разностное уравнение* (3) *и граничные условия* (4) *аппроксимируют уравнение* (1) *и граничные условия* (2) *на классе* K; 3) *уравнение* (3) *с граничными условиями* (4) *устойчиво при* $h < h_0$, *то:*

А. *При* $h \to 0$ *решение и разностного уравнения, сходится к решению и дифференциального уравнения т. е.* $\| u - u_h \|_{Ah} \to 0$.

Б. *Решение дифференциального уравнения* (1) *с граничными условиями* (2) *в классе* K *единственно и непрерывно зависит от правой части и граничных условий, точнее для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta > 0$, *что, если* $u \in K$, $\tilde{u} \in K$,

$$\| Lu - L\tilde{u} \|_B < \eta, \quad \| l_i(u) - l_i(\tilde{u}) \|_{Ci} < \eta \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{12}$$

то $\| u - \tilde{u} \|_A < \varepsilon$ (*т. е. краевая задача* (1), (2) *в классе функций* K *поставлена корректно при соответствующем выборе нормы*). *При этом предполагается, что оператор* $[\,]_h$ *обладает свойством: для* $\varphi_i \in Q_i$, $\tilde{\varphi}_i \in Q_i$

$$\| [\varphi_i]_h - [\tilde{\varphi}_i]_h \|_{Chi} \leqslant \| [\varphi_i - \tilde{\varphi}]_h \|_{Chi} \cdot \text{const}. \tag{13}$$

В. *Если уравнения* (1) *и* (3) *и граничные условия* (2) *и* (4) *линейны, то имеет место такая оценка скорости сходимости:*

$$\| u - u_h \|_{Ah} \leqslant \Big(\beta(h) M + \gamma(h) \sum_{i=1}^{s} M_i \Big) N \tag{14}$$

(*обозначения те же, что в* (6), (7) *и* (11)), *кроме того, для* $u \in K$

$$\| u \|_A \leqslant \Big(\| f \|_B + \sum_{i=1}^{s} \| \varphi_i \|_{Ci} \Big) N, \tag{15}$$

т. е. оператор L^{-1} *ограничен.*

Доказательство. А. Пусть $Lu = f$, $l_i(u) = \varphi_i$, $u \in K$, $h < h_0$. В силу (6) и (7): $\| f - R_h u \|_{Bh} \leqslant \beta(h) M$, $\| [\varphi_i]_h - r_{hi}(u) \|_{Chi} \leqslant \gamma(h) M_i$. Принимая во внимание (3) и (4), имеем

$$\| R_h u_h - R_h u \|_{Bh} \leqslant \beta(h) M, \quad \| r_{hi}(u_h) - r_{hi}(u) \|_{Chi} \leqslant \gamma(h) M_i. \tag{16}$$

При достаточно малом h условия (8) и (9) выполнены, поэтому, в силу устойчивости, имеем $\| u_h - u \|_{Ah} < \varepsilon$, что и требуется доказать.

Для доказательства утверждения В в (16) выносим за скобку R_h и r_{hi}, затем к разности $u_h - u$ применяем неравенство (11). Получим оценку (14). Чтобы доказать (15), заметим, что $\| u \|_{Ah} \leqslant \| u - u_h \|_{Ah} + \| u_h \|_{Ah}$. При $h \to 0$ $\| u - u_h \|_{Ah} \to 0$ согласно А, а $\| u_h \|_{Ah}$ удовлетворяет неравенству (11); правая часть в (11) стремится к правой части (15) согласно (5); $\| u \|_{Ah} \to \| u \|_A$.

Б. Пусть u и $\tilde{u}$ удовлетворяют неравенствам (12) и принадлежат K. Пусть u_h и $\tilde{u}_h$ такие, что

$$R_h u_h = Lu, \quad R_h \tilde{u}_h = L\tilde{u}, \quad r_{hi}(u_h) = [l_i(u)]_h, \quad r_{hi}(\tilde{u}_h) = [l_i(\tilde{u})]_h. \tag{17}$$

Из (5), (12), (13) следует, что при достаточно малом h

$$\| Lu - L\tilde{u} \|_{Bh} < 2\eta, \quad \| [l_i(u)]_h - [l_i(\tilde{u})]_h \|_{Chi} < 2\eta \cdot \text{const}.$$

Т. е. для разностных уравнений (17) условия (8) и (9) выполнены. Поэтому, в силу устойчивости, $\| u_h - \tilde{u}_h \|_{Ah} < \varepsilon(\eta)$. При достаточно малом h в силу А имеем $\| u_h - u \|_{Ah} < \varepsilon(\eta)$, $\| \tilde{u}_h - \tilde{u} \|_{Ah} < \varepsilon(\eta)$. Отсюда $\| u - \tilde{u} \|_{Ah} < 3\varepsilon(\eta)$. При $h \to 0$ и таком η, что $4\varepsilon(\eta) < \varepsilon_1$, получим в силу (5) $\| u - \tilde{u} \|_A < \varepsilon_1$.

Примечание. Теорема остается справедливой и для системы разностных уравнений, аппроксимирующей систему дифференциальных уравнений. В этом случае следует считать, что в (1) и (3) искомые функции — векторы.

Все сказанное также применимо к решению дифференциальных уравнений методом прямых (т. е. когда заменяются разностями производные не по всем переменным).

Пример 2. Пусть в области D с границей Γ имеем

$$a(x, y)u_{xx}+b(x, y)u_{yy}+c(x, y)u_x+d(x, y)u_y+e(x, y)u=f(x, y),\ u|_\Gamma=\varphi, \quad (18)$$

причем $a+b\geqslant q$, $|c|\leqslant Ma$, $|d|\leqslant Mb$, $e\leqslant 0$, где $q>0$, $M>0$ — постоянные, область D лежит в круге $x^2+y^2<r^2$. Пусть сетка D_h состоит из точек $x=mh$, $y=nh$ (m, n целые); Γ_h — граничные точки сетки; $\varphi(x, y)$ непрерывна в $D+\Gamma$. Пользуясь принципом максимума, можно показать, что при $h<2/M$ разностное уравнение

$$R_hv\equiv\frac{a}{h^2}(v_{m+1,\,n}-2v_{m,\,n}+v_{m-1,\,n})+\frac{b}{h^2}(v_{m,\,n+1}-2v_{m,\,n}+v_{m,\,n-1})+$$

$$+\frac{c}{2h}(v_{m+1,\,n}-v_{m-1,\,n})+\frac{d}{2h}(v_{m,\,n+1}-v_{m,\,n-1})-ev_{m,\,n}=f,\quad v|_{\Gamma_h}=\varphi, \quad (19)$$

где $v_{m,\,n}=v(mh, nh)$, устойчиво, если взять за нормы $\|\ \|_{Ah}$, $\|\ \|_{Bh}$, $\|\ \|_{Ch^i}$ в (11) максимум модуля. Следовательно, если задача (18) имеет дважды непрерывно дифференцируемое решение u, то при $h\to 0$ v равномерно сходится к u.

Пример 3. Рассмотрим разностное уравнение из статьи ([3]):

$$\frac{1}{2h}(u_{m+1,\,n}-u_{m-1,\,n})-\frac{p_{m,\,n}}{h_1^2}(u_{m,\,n+1}-u_{m+1,\,n}-u_{m-1,\,n}+u_{m,\,n-1})-$$

$$-\frac{q_{m,\,n}}{2h_1}(u_{m,\,n+1}-u_{m,\,n-1})-\frac{r_{m,\,n}}{2}(u_{m+1,\,n}+u_{m-1,\,n})=0, \quad (20)$$

где $u_{m,\,n}=u_h(mh, nh_1)$ и т. п. в области D $0\leqslant t\leqslant a$, $0\leqslant x\leqslant b$ с граничными условиями $u_h(t, 0)=u_h(t, b)=0$, $u_h(0, x)=\varphi(0, x)$, $u_h(h, x)=\varphi(h, x)$. Пусть $r(t, x)$ и $\varphi(t, x)$ удовлетворяют условию Липшица; $p(t, x)$ и $q(t, x)$ непрерывны; $h=\Delta t$ и $h_1=\Delta x$ такие, что в D $h_1\leqslant 2p/|q|$, $h\leqslant h_1/|q|$, $|r|h\leqslant \mathrm{const}<1$, при $h\to 0$ имеем $h_1\to 0$, $h/h_1\to 0$. Введем нормы: $\|u_h\|_{Ch1}=h_1\sum\limits_{n=0}^{N}|u_{0,\,n}|+\sum\limits_{n=1}^{N}|u_{0,\,n}-u_{0,\,n-1}|$, $\|u_h\|_{Ch2}=$ $=\frac{h_1}{h}\sum\limits_{n=1}^{N-1}|u_{1n}-u_{0,\,n}|$, $\|u_h\|_{Ah}=\max\limits_D|u_h|$, где $Nh_1=b$. Тогда можно доказать, что из $\|u_h\|_{Ch^i}<\delta$ $(i=1, 2)$ следует $\|u_h\|_{Ah}<\varepsilon$, т. е. имеет место устойчивость по начальным условиям. Отсюда можно вывести, что имеет место устойчивость по правой части и сходимость u_h к точному решению параболического дифференциального уравнения, если оно имеет непрерывные $\partial^2u/\partial x^2$ и $\partial^2u/\partial t^2$. Таким образом, наше определение устойчивости дает ответ на вопрос, поставленный в конце статьи ([3]), об устойчивости уравнения (20).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. G. O'Brien, M. A. Hyman, S. Kaplan, J. Math. and Phys., **29**, № 4 (1951). [2] В. С. Рябенький, ДАН, **86**, № 6 (1952). [3] E. C. du Fort, S. P. Frankel, Math. Tables and Other Aids Comput., **7**, № 43 (1953). [4] Н. Н. Мейман, ДАН, **97**, № 4 (1954).