Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 1

ФИЗИКА

М. И. КАГАНОВ и М. Я. АЗБЕЛЬ

К ТЕОРИИ АНОМАЛЬНОГО СКИН-ЭФФЕКТА

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 1 II 1955)

1. В последнее время появилось большое число работ, выясняющих зависимость поверхностного импеданса $Z = \frac{4\pi}{c}\left(\frac{E}{H}\right)_0$ металлов от длины свободного пробега электронов проводимости ([1-5]). В недавно опубликованном сообщении Зондгаймера ([4]) учтена анизотропия металла путем введения анизотропных эффективных масс, причем замкнутые выражения получены для предельного случая, когда эффективную длину свободного пробега

$$l = \frac{v\tau}{1 + i\omega\tau} \quad *$$

можно считать бесконечно большой, а ток создается электронами, двигающимися параллельно поверхности металла.

Пиппард ([5]), исходя из предложенного им качественного метода рассмотрения, получил с точностью до численного комплексного множителя выражение для поверхностного импеданса Z, справедливое при произвольном законе дисперсии электронов проводимости:

$$\varepsilon = \varepsilon(p_x,\ p_y,\ p_z). \tag{1}$$

2. Настоящее сообщение, в отличие от ([5]), посвящено нахождению точного выражения для полного поверхностного сопротивления в случае произвольного закона дисперсии (1) в предельном случае бесконечно большой длины свободного пробега (т. е. при $|l| \gg \delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$; σ — среднее значение статической проводимости металла).

Полная система уравнений, описывающая поведение электронов в металле, состоит из кинетического уравнения для отклонения функции распределения от ее равновесного значения f_0

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{f}{n_z l} = -\frac{\mathbf{nE}}{n_z}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \tag{3}$$

и уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}; \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{H}; \tag{4}$$

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathbf{v} f d\tau_{\mathrm{p}} = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty d\varepsilon \int_{S(\varepsilon)} \mathbf{n} f dS; \tag{5}$$

---

* τ — время свободного пробега; ω — частота электромагнитного поля, $\mathbf{v} = \nabla_{\mathrm{p}}\varepsilon$ — скорость электронов на границе поверхности Ферми

$$\varepsilon(p_x,\ p_y,\ p_z) = \varepsilon_0, \tag{2}$$

ε_0 — граничная энергия Ферми.

$\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$; l — функции импульса; dS — элемент площади на поверхности равной энергии.

f удовлетворяет граничным условиям ([1], [6]):

$$f\Big|_{\substack{n_z>0\\ z=0}} = qf\Big|_{\substack{n_z<0\\ z=0}}; \qquad f\Big|_{\substack{n_z<0\\ z=\infty}} = 0. \tag{6}$$

Ось z совпадает с нормалью к поверхности металла, который занимает полупространство ($z>0$).

3. При написании кинетического уравнения (3) мы воспользовались обычной линеаризацией. Кроме того, мы записали интеграл столкновений в виде $\frac{f}{\tau}$, хотя удовлетворяющий закону сохранения заряда вид есть $\frac{f-\overline{f}}{\tau}$ * (черта означает усреднение по направлениям). Однако $\frac{\overline{f}}{\tau}$, которое может быть выражено через $\operatorname{div}\mathbf{E}$, пренебрежимо мало (с той же степенью точности, что и пренебрежение током смещения).

Как мы уже говорили, основную роль играют электроны, двигающиеся параллельно границе. Это позволяет пренебречь в правой части уравнения (3) слагаемым, содержащим E_z, а следовательно, считать E_z равным нулю.

4. Подставляя решение уравнения (3) с граничным условием (6) в выражение для плотности тока (5) и пользуясь тем, что $\partial f_0/\partial\varepsilon = -\delta(\varepsilon-\varepsilon_0)$, а поверхность Ферми обладает центром симметрии, получим:

$$\frac{d^2E_i}{dz^2} = \frac{4\pi\omega i}{c^2}\left\{\int_0^\infty K_{ik}(|z-\zeta|)\,E_k(\zeta)\,d\zeta + q\int_0^\infty K_{ik}(z+\zeta)\,E_k(\zeta)\,d\zeta\right\}, \tag{7}$$

$$K_{ik}(x) = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{(n_z>0)} \frac{n_i n_k}{n_z}\, e^{-|x|/ln_z}\, dS. \tag{8}$$

i и k принимают значения 1 и 2, интегрирование в выражении (8) идет по той части поверхности Ферми, где $n_z>0$. Полученная система интегро-дифференциальных уравнений (7) может быть решена до конца в случае $q=0$ и $q=1$. (Последний случай представляет чисто академический интерес: рассеяние электронов на границе, очевидно, диффузно или близко к таковому.)

Решение системы (7) и при $q=1$ и при $q=0$ использует компоненту Фурье ядра $K_{ik}(x)$ ([1]):

$$K_{ik}(t) = \frac{4e^2}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{n_z>0} l\,\frac{n_i n_k\, dS}{(ln_z t)^2+1} =$$

$$= \frac{4e^2}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{n_i n_k}{K(\theta,\varphi)}\,\frac{l\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{(ln_z t)^2+1}. \tag{9}$$

---

* Как мы увидим дальше, окончательные формулы не зависят от вида интеграла столкновений.

$K(\vartheta, \varphi)$ — гауссова кривизна поверхности Ферми. Последнее выражение допускает предельный переход при $l \to \infty$:

$$K_{ik}(t) \sim \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} \frac{n_i n_k d\varphi}{K(\varphi)} \frac{\pi}{|t|} = \frac{3\pi}{4} \frac{B_{ik}}{|t|},$$
$$K\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) \equiv K(\varphi). \tag{10}$$

Выберем оси x и y по направлению главных осей тензора

$$B_{ik} = \frac{8e^2}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} \frac{n_i n_k}{K(\varphi)} d\varphi.$$

При этом система уравнений для компонент Фурье, получающаяся из системы (7), распадается на два независимых уравнения, и можно повторить вычисления, проделанные в работе [1].

В результате получаем

$$Z_{x,y} = \begin{cases} \left(\sqrt{3}\,\pi \frac{\omega^2 l}{c^4 B_{x,y}}\right)^{1/3} (1 + \sqrt{3}\,i) * & (q = 0); \\ \frac{8}{9}\left(\sqrt{3}\,\pi \frac{\omega^2}{c^4 B_{x,y}}\right)^{2/3} (1 + \sqrt{3}\,i) & (q = 1). \end{cases} \tag{11}$$

Выводы

1. Зависимость импеданса от угла между нормалью к поверхности и кристаллографическими осями определяется тензором B_{ik}.

2. Частотная зависимость импеданса $\omega^{2/3}$ и соотношение между $\mathrm{Re}\,Z$ и $\mathrm{Im}\,Z$ не зависят от вида дисперсионной зависимости.

3. Полученные выражения (11) не зависят от величин, связанных со взаимодействием электронов с решеткой (τ, l), что позволяет использовать их для определения формы поверхности Ферми.

В заключение пользуемся случаем выразить благодарность Л. Д. Ландау и И. М. Лифшицу за ценные советы.

Физико-технический институт
Академии наук УССР

Поступило
27 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. E. H. Reuter, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc., A, **195**, 336 (1949). [2] А. А. Абрикосов, ДАН, **86**, 43 (1952). [3] R. B. Dingle, Physica, **19**, 311, 348, 729, 1187 (1953). [4] E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc., A, **224**, 260 (1954). [5] A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc., A, **224**, 273 (1954). [6] N. Fuchs, Proc. Cambr. Phyl. Soc., **30**, 100 (1938).

* $Z_x = \frac{4\pi}{c}\left(\frac{E_x}{H_y}\right)_0$; $Z_y = -\frac{4\pi}{c}\left(\frac{E_y}{H_x}\right)_0$.