Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 6

МАТЕМАТИКА

Ю. Д. МАКСИМОВ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 3 XII 1954)

Введем класс $C_\varepsilon(p)$ (p — натуральное число, $\varepsilon>0$) функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям:

1. Функции $f(z)$ регулярны в круге $|z|<1$ и $f(0)=0$.

2. Существует ρ, $0\leqslant\rho<1$ (для каждой функции свое), такое, что в кольце $\rho<|z|<1$, $z=re^{i\theta}$ будет:

$$\text{а)}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}d\theta>-\varepsilon;\ \theta_1<\theta_2;\qquad \text{б)}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}d\theta=2p\pi.$$

Из условия 2б следует, что $f'(z)$ в круге $|z|<1$ имеет $(p-1)$ корней (с учетом кратности).

Подкласс функций из $C_\varepsilon(p)$ вида

$$f(z)=z^q(1+c_1z+c_2z^2+\ldots)$$

с заданным q обозначим через $C_\varepsilon(p;q)$.

Условие 2а равносильно условию:

$$\left[\arg f'(re^{i\theta_2})+\theta_2+\frac{\pi}{2}\right]-\left[\arg f'(re^{i\theta_1})+\theta_1+\frac{\pi}{2}\right]>-\varepsilon;\quad \theta_1<\theta_2.$$

Левая часть этого неравенства является приращением угла, образованного касательной к образу окружности $|z|=r$, $\rho<r<1$, с положительным направлением вещественной оси при изменении $\theta=\arg z$ от θ_1 до θ_2; $\theta_1<\theta_2$.

Функции класса $C_\varepsilon(p)$ назовем локально ε-выпуклыми функциями.

Введем класс $S_\varepsilon(p)$ (p — натуральное число, $\varepsilon>0$) функций $F(z)$, удовлетворяющих условиям:

1. Функции $F(z)$ регулярны в круге $|z|<1$ и $F(0)=0$.

2. Существует ρ, $0\leqslant\rho<1$ (для каждой функции свое), такое, что, в кольце $\rho<|z|<1$; $z=re^{i\theta}$ будет:

$$\text{а)}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\}d\theta>-\varepsilon,\ \theta_1<\theta_2;\qquad \text{б)}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\}d\theta=2p\pi.$$

Из условия 2б следует, что $F(z)$ имеет в $|z|<1$ p корней (с учетом кратности).

Подкласс функций из $S_\varepsilon(p)$ вида

$$F(z)=z^q(1+a_1z+a_2z^2+\ldots)$$

с фиксированным q обозначим через $S_\varepsilon(p;q)$.

Условие 2а равносильно условию

$$\arg F(re^{i\theta_2})-\arg F(re^{i\theta_1})>-\varepsilon,\quad \theta_1<\theta_2.$$

Левая часть этого неравенства является приращением угла, состав-

ляемого радиусом-вектором точки $F(re^{i\theta})$ с положительным направлением вещественной оси при изменении $\theta = \arg z$ от θ_1 до θ_2, $\theta_1 < \theta_2$.

Функции класса $S_\varepsilon(p)$ назовем локально ε-звездными функциями.

Отметим, что если $f(z) \in C_\varepsilon(p; q)$, то $\frac{1}{q} zf'(z) = F(z) \in S_\varepsilon(p; q)$, и обратно, если $F(z) \in S_\varepsilon(p; q)$, то $\int_0^z q \frac{F(z)}{z} dz = f(z) \in C_\varepsilon(p; q)$. Классы $C(p) = C_0(p)$ и $S(p) = S_0(p)$ введены Гудманом ([1]). Класс $C_\pi = C_\pi(1)$ введен Вильфредом Капланом ([2]).

Обозначим через M класс вещественных неубывающих функций $\mu(\theta)$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ таких, что $\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = 1$.

Теорема 1. *Классы $C_\varepsilon(p; q)$ и $S_\varepsilon(p; q)$ можно представить, соответственно, следующими структурными формулами:*

$$f(z) = \int_0^z qz^{q-1} \prod_{k=1}^{p-q} \left[\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right)\left(1 - \bar{\alpha}_k z\right)\right] \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + e^{i\varphi} e^{-i\theta} z}{1 - e^{-i\theta} z} d\alpha(\theta)\right]^{\varepsilon/\pi} \times$$

$$\times \exp\left\{-2p \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - e^{-i\theta} z)\, d\mu(\theta)\right\} dz, \tag{1}$$

$$F(z) = z^q \prod_{k=1}^{p-q} \left[\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right)\left(1 - \bar{\alpha}_k z\right)\right] \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + e^{i\varphi} e^{-i\theta} z}{1 - e^{-i\theta} z} d\alpha(\theta)\right]^{\varepsilon/\pi} \times$$

$$\times \exp\left\{-2p \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - e^{-i\theta} z)\, d\mu(\theta)\right\}. \tag{2}$$

Здесь в обеих формулах $|\alpha_k| < 1$; $k = 1, \ldots, (p - q)$; $\mu(\theta), \alpha(\theta) \in M$; φ вещественно, $|\varphi| < \pi$; $1 \leqslant q \leqslant p$; под логарифмом понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$.

Термин структурная формула введен В. А. Зморовичем ([3], стр. 643) и здесь употребляется в том же смысле. Доказательство основывается на представлении гармонических в $|z| < 1$ функций, имеющих в $|z| < 1$ положительную вещественную часть, через интеграл Пуассона — Стилтьеса ([4]), а также на ряде других предложений.

Теорема 2. *При $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \pi$ функции класса $C_\varepsilon(p; q)$ не более чем p-листны.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству Вильфреда Каплана для класса C_π ([2]).

Следствие 1. Если $\varepsilon = \pi$, $q = p$, $\alpha(\theta) = \mu(\theta)$, $\varphi = 0$, то формула (1) превращается в формулу (2) при $\varepsilon = 0$, $q = p$, т. е. класс $C_\pi(p; p)$ включает в себя класс $S_0(p; p)$.

Класс C_π содержит как подклассы выпуклые ([5], стр. 219), звездные ([5], стр. 217) и выпуклые по направлению ([6], стр. 468) регулярные и однолистные в $|z| < 1$ функции. Класс $S_\pi = S_\pi(1; 1)$ содержит в себе функции, звездные по направлению ([6], стр. 465).

Следствие 2. Если в (1) $\alpha(\theta)$ и $\mu(\theta)$ будут ступенчатыми функциями с конечным числом скачков, то (1) принимает вид:

$$f(z) = \int_0^z qz^{q-1} \prod_{k=1}^{p-q} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right)\left(1 - \bar{\alpha}_k z\right) \prod_{t=1}^{n} (1 - e^{i\theta_t z})^{-2p\lambda_t} \times$$

$$\times \left[\sum_{s=1}^{m} \mu_s \frac{1 + e^{i\varphi} e^{i\theta_s z}}{1 - e^{i\theta_s z}}\right]^{\varepsilon/\pi} dz.$$

Здесь θ_t и θ_s вещественны; $\sum_{t=1}^{n} \lambda_t = 1$; $\sum_{s=1}^{m} \mu_s = 1$; $\lambda_t > 0$; $\mu_s > 0$.

Эта формула является обобщением формулы Кристоффеля — Шварца. При $\varepsilon = 0$ получаем формулу Гудмана ([1]).

Теорема 3. *Среди функций $f(z)$ класса $C_\varepsilon(p; q)$ с фиксированными нулями производной α_k $(k = 1, \ldots, p-q)$ максимум функционалов*

$$\operatorname{Re}\left\{P\left[\ln \frac{f'(z)}{qz^{q-1}\prod\limits_{k=1}^{p-q}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\left(1-\overline{\alpha}_k z\right)}\right]\right\}; \quad \operatorname{Re}\{P[f'(z)]\}$$

при данной целой функции $P(w)$ и фиксированном z из $|z|<1$ достигается для единственной функции вида

$$f(\zeta) = \int_0^\zeta q\zeta^{q-1}\prod_{k=1}^{p-q}\left(1-\frac{\zeta}{\alpha_k}\right)\left(1-\overline{\alpha}_k\zeta\right)\left[\frac{1+e^{i\varphi}e^{i\vartheta}\zeta}{1-e^{i\vartheta}\zeta}\right]^{\varepsilon/\pi}\frac{d\zeta}{(1-e^{i\psi}\zeta)^{2p}}. \tag{3}$$

Здесь $1 \leqslant q \leqslant p$; $|\alpha_k|<1$; ϑ, φ, ψ вещественны. Считаем, что при экстремуме соответственно:

$$P'\left\{\ln \frac{f'(z)}{qz^{q-1}\prod\limits_{k=1}^{p-q}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\left(1-\overline{\alpha}_k z\right)}\right\} \neq 0; \quad P'[f'(z)] \neq 0.$$

Кроме того, считаем, что во втором функционале z отлично от корней $f'(z)$. Под логарифмом понимается любая фиксированная ветвь.

Доказательство основывается на формуле (1) и на методе Г. М. Голузина варьирования функционалов ([7]).

Следствие 1. Для функций $f(z) \in C_\varepsilon(p; q)$ с фиксированными нулями производной имеем следующую точную оценку:

$$\left|\arg\left\{\frac{f'(z)}{z^{q-1}\prod\limits_{k=1}^{p-q}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\left(1-\overline{\alpha}_k z\right)}\right\}\right| \leqslant 2\left(p+\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\arcsin r.$$

Здесь $z = re^{i\theta}$, а под аргументом подразумеваем ветвь, обращающуюся в нуль при $z = 0$. Знак равенства имеет место для функции (3) при $\vartheta = \psi = -\theta \pm \arccos r$; $\varphi = \pm \arcsin r$.

Следствие 2. Для функций класса $C_\varepsilon(p; q)$ с фиксированными нулями производной имеем следующие точные оценки при $z = re^{i\theta}$:

$$qr^{q-1}\prod_{k=1}^{p-q}\left|1-\frac{r}{|\alpha_k|}\right|(1-|\alpha_k|r)\frac{(1-r)^{\varepsilon/\pi}}{(1+r)^{2p+\varepsilon/\pi}} \leqslant$$

$$\leqslant |f'(z)| \leqslant qr^{q-1}\prod_{k=1}^{p-q}\left(1+\frac{r}{|\alpha_k|}\right)(1+|\alpha_k|r)\frac{(1+r)^{\varepsilon/\pi}}{(1-r)^{2p+\varepsilon/\pi}}. \tag{4}$$

Знаки равенства в (4) имеют место для функции

$$f(z) = \int_0^z qz^{q-1}\prod_{k=1}^{p-q}\left(1+\frac{e^{i\beta}z}{|\alpha_k|}\right)(1+e^{i\beta}|\alpha_k|z)\left(\frac{1+e^{i\beta}z}{1-e^{i\beta}z}\right)^{\varepsilon/\pi} \times$$

$$\times \frac{dz}{(1-e^{i\beta}z)^{2p}} \in C_\varepsilon(p; q)$$

слева при $\beta = \pi - 0$, справа при $\beta = -0$.

Следствие 3. Среди функций $F(z)$ класса $S_\varepsilon(p; q)$ с фиксированными нулями α_k $(k = 1, \ldots, p-q)$ максимум функционалов

$$\operatorname{Re}\left\{P\left[\ln \frac{F(z)}{z^q \prod\limits_{k=1}^{p-q}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\left(1-\bar{\alpha}_k z\right)}\right]\right\}; \quad \operatorname{Re}\{P[F(z)]\}$$

при данной целой функции $P(w)$ и фиксированном z из $|z|<1$ достигается для единственной функции вида

$$F(\zeta) = \zeta^q \prod_{k=1}^{p-q}\left(1-\frac{\zeta}{\alpha_k}\right)\left(1-\bar{\alpha}_k\zeta\right)\left[\frac{1+e^{i\varphi}e^{i\vartheta}\zeta}{1-e^{i\vartheta}\zeta}\right]^{\varepsilon/\pi}\frac{1}{(1-e^{i\psi}\zeta)^{2p}}. \tag{5}$$

Здесь $1 \leqslant q \leqslant p$; $|\alpha_k|<1$; φ, ϑ, ψ вещественны. Считаем, что при экстремуме, соответственно:

$$P'\left[\ln \frac{F(z)}{z^q \prod\limits_{k=1}^{p-q}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\left(1-\bar{\alpha}_k z\right)}\right] \neq 0; \quad P'[F(z)] \neq 0.$$

Кроме того, считаем, что во втором функционале z отлично от корней $F(z)$. Под логарифмом понимается любая фиксированная ветвь.

Следствие 4. Для функций $F(z) \in S_\varepsilon(p; q)$ с фиксированными нулями имеем точные оценки $(z = re^{i\theta})$:

$$\left|\arg \frac{F(z)}{z^q \prod\limits_{k=1}^{p-q}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\left(1-\bar{\alpha}_k z\right)}\right| \leqslant 2\left(p+\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\arcsin r, \tag{6}$$

$$r^q \prod_{k=1}^{p-q}\left|1-\frac{r}{|\alpha_k|}\right|\left(1-|\alpha_k|\,r\right)\frac{(1-r)^{\varepsilon/\pi}}{(1-r)^{2p-\varepsilon/\pi}} \leqslant |F(z)| \leqslant$$

$$\leqslant r^q \prod_{k=1}^{p-q}\left(1+\frac{r}{|\alpha_k|}\right)\left(1+|\alpha_k|\,r\right)\frac{(1+r)^{\varepsilon/\pi}}{(1-r)^{2p+\varepsilon/\pi}}. \tag{7}$$

В (6) под аргументом понимается ветвь, образующаяся в нуль при $z = 0$. Знаки равенства имеют место в (6) для функции (5) при $\vartheta = \psi = \theta \pm \arccos r$; $\varphi = \pm \arcsin r$, в (7) для функции

$$F(z) = z^q \prod_{k=1}^{p-q}\left(1+\frac{e^{i\beta}z}{|\alpha_k|}\right)\left(1+e^{i\beta}|\alpha_k|\,z\right)\frac{(1+e^{i\beta}z)^{\varepsilon/\pi}}{(1-e^{i\beta}z)^{2p+\varepsilon/\pi}} \in S_\varepsilon(p; q)$$

слева при $\beta = \pi - \theta$ и справа при $\beta = -\theta$.

Из (7) при $\varepsilon = 0$ получаются оценки Гудмана для класса $S(p; q) = S_0(p; q)$ [1].

Поступило
21 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. W. Goodman, Trans. Am. Math. Soc., **68**, № 2 (1950). [2] W. Kaplan, Michigan Math. J., **1**, № 2 (1952). [3] В. А. Зморович, Матем. сборн., **32**, в. 3 (1953). [4] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950. [5] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1952. [6] M. S. Robertson, Am. J. Math., **58**, № 3 (1936). [7] Г. М. Голузин, Уч. зап. ЛГУ, в. 23 (1952).