Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 6

*МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР И. М. ГЕЛЬФАНД и М. И. ГРАЕВ

# СЛЕДЫ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ УНИМОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ

В теории конечномерных представлений групп существенную роль играет понятие следа (или характера) неприводимого представления, который определяется как след матрицы представления. Непосредственное перенесение понятия следа на теорию бесконечномерных унитарных представлений не очевидно, так как операторы представлений, будучи унитарными, могут не иметь следа в обычном смысле. Чтобы придать смысл понятию следа бесконечномерного представления, в [1] вместо оператора $T_g$ представления рассматривается оператор $T_x = \int x(g)\, T_g\, dg$, где $x(g)$ — произвольная функция на группе, равная нулю вне компактного множества, а интегрирование ведется по всей группе. Оказывается, что оператор $T_x$ задается ядром $K_x(z_1, z_2)$, являющимся ядром Гильберта — Шмидта, и след оператора $T_x$ можно определить по формуле

$$S(T_x) = \int K_x(z, z)\, dz. \tag{1}$$

Этой формуле, в свою очередь, можно придать вид

$$S(T_x) = \int x(g)\, \pi(g)\, dg. \tag{2}$$

Функцию $\pi(g)$ естественно назвать следом бесконечномерного представления (см. также [4]). В [1] эта функция была найдена для всех неприводимых унитарных представлений комплексных простых групп Ли.

При переходе от комплексных простых групп к группам вещественным задача вычисления следов усложняется. В отличие от первых, представления вещественных групп реализуются, как правило, наиболее естественным образом не в пространствах функций с суммируемым квадратом, а в пространствах функций, аналитических по некоторым из переменных. В этих пространствах формула (1) уже не верна.

В данной заметке получены формулы для следов основных серий неприводимых унитарных представлений вещественной унимодулярной группы, описанных в [2,3].

Рассмотрим сперва группу унимодулярных матриц порядка 2. Эта группа обладает двумя основными сериями неприводимых унитарных представлений $d_0$ и $d_1$. Представления серии $d_0$ реализуются в пространстве функций одной вещественной переменной $x$ с интегрируемым квадратом и задаются вещественным параметром $\rho$. Оператор $T_g$ представления, отвечающий матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, имеет вид

$$T_g f(x) = f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right) |\beta x + \delta|^{i\rho - 1} \tag{3}$$

или

$$T_g f(x) = f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right) |\beta x + \delta|^{i\rho - 1} \operatorname{sign}(\beta x + \delta). \tag{3'}$$

След $\pi(g)$ этого представления может быть вычислен в точности так же, как и для основной серии представлений комплексной группы. Если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — собственные значения матрицы $g$, то в случае (3)

$$\pi(g) = \frac{|\lambda_1|^{i\rho} + |\lambda_2|^{i\rho}}{|\lambda_1 - \lambda_2|} \tag{4}$$

при вещественных $\lambda_1$, $\lambda_2$ и $\pi(g) = 0$ при комплексных $\lambda_1$, $\lambda_2$; в случае (3')

$$\pi(g) = \frac{|\lambda_1|^{i\rho} + |\lambda_2|^{i\rho}}{|\lambda_1 - \lambda_2|} \operatorname{sign} \lambda_1 \tag{4'}$$

при вещественных $\lambda_1$, $\lambda_2$ и $\pi(g) = 0$ при комплексных $\lambda_1$, $\lambda_2$.

Серия $d_1$ распадается на две части: $d_1^+$ и $d_1^-$. Представления серии $d_1^+$ задаются натуральным числом $n$ и реализуются в пространстве функций $f(z) = f(x, y)$, аналитических в верхней полуплоскости, с нормой $\|f\|^2 = \frac{1}{\Gamma(n-1)} \iint |f(x, y)|^2 y^{n-2} dx\, dy$. Оператор $T_g$ представления задается формулой

$$T_g f(z) = f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)(\beta z + \delta)^{-n}. \tag{5}$$

Представления серии $d_1^-$ реализуются аналогично в пространстве функций, аналитических в нижней полуплоскости. Рассмотрим сумму представлений из $d_1^+$ и $d_1^-$, отвечающих одному и тому же индексу $n$. Чтобы вычислить след такого представления, реализуем его в пространстве функций с интегрируемым квадратом. Для этого от функций $f(z)$ нужно перейти к граничным значениям на вещественной оси их интегралов порядка $\frac{n-1}{2}$ *. Формулы для операторов представления принимают при этом значительно более сложный вид. В соответствии с (1) и (2) получаем

$$\pi(g) = \frac{2\lambda_1^{-(n-1)} \operatorname{sign} \lambda_1}{|\lambda_1 - \lambda_2|}, \tag{6}$$

если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ вещественны, причем $|\lambda_1| > |\lambda_2|$;

$$\pi(g) = \frac{\lambda_1^{-(n-1)} - \lambda_2^{-(n-1)}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \tag{6'}$$

если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ комплексны.

Рассмотрим теперь вещественную унимодулярную группу $G$ матриц произвольного порядка $n$. Эта группа обладает основными сериями унитарных представлений $d_0$, $d_1, \ldots, d_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}$, $d^+_{\left[\frac{n}{2}\right]}$, $d_{\left[\frac{n}{2}\right]}$, описанными в ([2], [3]). Вместо представлений отдельно из $d^+_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ и из $d^-_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ будем рас-

* Если $\frac{n-1}{2}$ — полуцелое число, то соответственно нужно брать интегралы полуцелого порядка.

сматривать суммы соответствующих представлений из $d^{+}_{[\frac{n}{2}]}$ и из $d^{-}_{[\frac{n}{2}]}$; получаемые представления назовем представлениями серии $d_{[\frac{n}{2}]}$.

Представление серии $d_m$ реализуется в пространстве функций от $m$ комплексных переменных, по которым эти функции аналитичны, и $\frac{n(n-1)}{2} - m$ вещественных переменных. Каждое представление задается $m$ натуральными числами $n_1, n_2, \ldots, n_m$, $n-m-1$ вещественными числами $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-m-1}$ и $n-2m-1$ индексами $\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+2}, \ldots, \varepsilon_{n-m-1}$, которые могут принимать значения 0 или 1. Как и в случае группы матриц второго порядка, мы реализуем представление в пространстве функций с интегрируемым квадратом и вычисляем затем след оператора $T_g$ представления в соответствии с формулами (1)—(2).

Приведем окончательное выражение для следа $\pi(g)$ оператора $T_g$ представления серии $d_m$.

Формула для $\pi(g)$ зависит от числа комплексных собственных значений у матрицы $g$. Если матрица $g$ имеет более $2m$ комплексных собственных значений, то $\pi(g)=0$. Пусть теперь число комплексных собственных значений матрицы $g$ не превышает $2m$. Рассмотрим в нашей группе клеточную диагональную матрицу $\delta$, сопряженную матрице $g$, у которой $m$ первых стоящих на диагонали клеток $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ второго порядка, а остальные клетки $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_{n-m}$ первого порядка. При этом предполагается, что матрицы $\delta_p$ с комплексными собственными значениями кратны ортогональным матрицам, а матрицы $\delta_p$ с вещественными собственными значениями имеют диагональный вид. Обозначим через $\lambda_{p1}$ и $\lambda_{p2}$ собственные значения матрицы $\delta_p$, через $\Lambda_p$ — ее определитель и через $D(g)$ — дискриминант характеристического многочлена матрицы $g$. Тогда

$$\pi(g) = |D(g)|^{-1/2} \times$$

$$\times \sum_{(\delta)} \left\{ \prod^{(1)} \left( \frac{\lambda_{p1}^{-(n_p-1)} - \lambda_{p2}^{-(n_p-1)}}{\lambda_{p1} - \lambda_{p2}} |\lambda_{p1} - \lambda_{p2}| \right) \cdot \prod^{(2)} \left( \lambda_p^{-(n_p-1)} \operatorname{sign} \lambda_p \right) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{p=1}^{m} |\Lambda_p|^{\frac{n_p-1}{2} + i\rho_p} \cdot \prod_{p=m+1}^{n-m-1} |\lambda_p|^{i\rho_p} (\operatorname{sign} \lambda_p)^{\varepsilon_p} \right\}. \qquad (7)$$

Здесь первое произведение берется по матрицам $\delta_p$ с компексными, а второе — по матрицам $\delta_p$ с вещественными собственными значениями; $\lambda_p$ обозначает максимальное по абсолютной величине из чисел $\lambda_{p1}$ и $\lambda_{p2}$. Сумма распространяется на всевозможные диагональные (клеточные) формы матрицы $g$ указанного выше типа.

Формулу (7) для следов можно также вывести из следующих наводящих соображений, которые одновременно позволяют найти некоторые вырожденные серии представлений группы $G$.

Среди всех основных серий унитарных представлений группы $G$ имеется серия $d_0$ представлений, задаваемых вещественными параметрами $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ и реализуемых в пространстве функций от $\frac{n(n-1)}{2}$ вещественных переменных с интегрируемым квадратом. Вычисление следов этих представлений ведется так же, как и для представлений основной серии комплексной унимодулярной группы, и не вызывает особых затруднений. Если в формуле для операторов этих представлений некоторым из параметров $\rho_p$, скажем, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, придавать комплексные значения, мы получим другие представления группы $G$.

При $\rho_p = in_p$ $(p = 1, 2, \ldots, m)$, где $n_p$ — целые числа, получается приводимое представление, распадающееся на представление из серии $d_m$ и на полиномиально вырожденные представления*. Напомним, что, согласно (1), вырожденными называются представления, реализуемые в пространстве функций, зависящих не от всех $\frac{n(n-1)}{2}$ переменных, а лишь от части их. Самым вырожденным представлением является единичное представление, которое можно трактовать как представление в одномерном пространстве констант. Полиномиально вырожденные представления, возникающие при рассмотрении вещественных групп, строятся в пространстве функций, являющихся по некоторым из переменных не константами, а многочленами заданной степени.

Чтобы получить след представления серии $d_m$, достаточно теперь из выражения для следа представления серии $d_0$ при $\rho_p = in_p$ $(p = 1, 2, \ldots, m)$ вычесть следы этих полиномиально вырожденных представлений.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 XII 1954

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Тр. Инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **36** (1950). [2] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, ДАН, **86**, № 3 (1952). [3] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Изв. АН СССР, сер. матем., **17**, № 3 (1953). [4] Harish-Chandra, Trans. Am. Math. Soc., **76**, No. 2 (1954).

* В случае группы матриц второго порядка соответствующее представление распадается на представление дискретной серии $d_1$ и на конечномерные представления.