

Д. А. СУПРУНЕНКО

ЛОКАЛЬНО-НИЛЬПОТЕНТНЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ПОДГРУППЫ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 I 1955)

В настоящей заметке устанавливается сопряженность всех максимальных локально-нильпотентных неприводимых подгрупп полной линейной группы над алгебраически замкнутым полем. Эта теорема аналогична результату статьи ⁽¹⁾, где доказывается сопряженность всех максимальных транзитивных нильпотентных подгрупп симметрической группы. Докажем сперва одну лемму о нильпотентных неприводимых подгруппах полной линейной группы $GL(n, P)$.

Лемма 1. Пусть Γ — неприводимая нильпотентная подгруппа $GL(n, P)$, где P — алгебраически замкнутое поле. Пусть, далее, центр Γ совпадает с мультипликативной группой M поля PE_n . Тогда пересечение $\mathfrak{G} = \Gamma \cap SL(n, P)$, где $SL(n, P)$ — унимодулярная группа, является конечной группой, причем порядок $\mathfrak{G}$ и число n обладают одними и теми же простыми делителями.

Доказательство. Прежде всего покажем, что число n и порядок фактор-группы Γ/Z , где Z — центр Γ , имеют один и тот же состав простых делителей. В статье ⁽²⁾ доказывается, что Γ/Z — конечная группа. Там же доказывается, что порядок любого элемента Γ/Z является делителем числа вида k^{l-1} , где k — делитель n (лемма 3). Следовательно, любой простой делитель порядка фактор-группы Γ/Z является делителем числа n . Далее, так как поле P алгебраически замкнуто, то нильпотентная неприводимая группа Γ сопряжена в $GL(n, P)$ с некоторой мономиальной группой и обладает таким максимальным абелевым нормальным делителем A , фактор-группа по которому изоморфна транзитивной нильпотентной подгруппе симметрической группы S_n .

Следовательно, порядок Γ/A делится на n . Так как $A \supset Z$, то порядок Γ/Z тоже делится на n . Легко видеть, что $\Gamma = \mathfrak{G}M$, где $\mathfrak{G} = \Gamma \cap SL(n, P)$. Очевидно, $\Gamma/Z = \mathfrak{G}M/M \cong \mathfrak{G}/M \cap SL(n, P)$. Отсюда и следует лемма.

Переходим теперь к локально-нильпотентным подгруппам $GL(n, P)$. Пусть P — алгебраически замкнутое поле, Γ — локально-нильпотентная неприводимая подгруппа $GL(n, P)$. Будем считать, что Γ содержит мультипликативную группу M поля PE_n . Тогда $\Gamma = \mathfrak{G}M$, где $\mathfrak{G} = \Gamma \cap SL(n, P)$.

Лемма 2. Группа $\mathfrak{G} = \Gamma \cap SL(n, P)$ локально-конечна. Множество всех простых делителей порядков ее элементов совпадает с множеством всех простых делителей числа n .

Доказательство. Так как $\Gamma = \mathfrak{G}M$, то $\mathfrak{G}$ неприводима. Следовательно, в $\mathfrak{G}$ можно найти n^2 линейно независимых матриц $g_1, g_2, \dots, g_{n^2}$. Если теперь $h_1, h_2, \dots, h_s$ — какие-либо матрицы из $\mathfrak{G}$, то порождаемая ими группа $\mathfrak{H}$ содержится в неприводимой нильпотентной группе $\mathfrak{G}_0 \subset SL(n, P)$, порождаемой матрицами $g_1, g_2, \dots, g_{n^2}; h_1, h_2, \dots, h_s$. Следовательно, лемма 2 вытекает из леммы 1.

Лемма 3. Локально-нильпотентная неприводимая подгруппа Γ группы $GL(n, P)$ сопряжена в $GL(n, P)$ с некоторой мономимальной группой, т. е. в n -мерном пространстве $P^{(n)}$ над P , в котором действует Γ , есть такой базис $u_1, u_2, \dots, u_n$, что для любого $g \in \Gamma$

$$g(u_i) = \gamma_i u_{i_1}, \quad g(u_2) = \gamma_2 u_{i_2}, \quad \dots, \quad g(u_n) = \gamma_n u_{i_n}, \quad \gamma_j \in P, \quad (1)$$

где $i_1, i_2, \dots, i_n$ — перестановка чисел $1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Достаточно показать, что при $n > 1$ Γ импримитивна. Пусть Γ примитивна, тогда M — максимальный абелев нормальный делитель Γ . Следовательно, индекс M в Γ конечен. Так как $\Gamma = \mathfrak{G}M$, где $\mathfrak{G} = \Gamma \cap SL(n, P)$, то $\mathfrak{G}$ — конечная нильпотентная неприводимая подгруппа $GL(n, P)$. $\mathfrak{G}$ лишь тогда примитивна, когда $n = 1$. Отсюда и вытекает лемма.

Пусть пока $n = p^v$, где p — простое число. Построим одну неприводимую локально-нильпотентную подгруппу Γ_{p^v} группы $GL(p^v, P)$, считая, что характеристика поля P не совпадает с p^* . В n -мерном пространстве над P выберем какой-либо базис $u_1, u_2, \dots, u_n$ ($n = p^v$). Положим

$$\Gamma_{p^v} = N_{p^v} H_{p^v} M, \quad (2)$$

где M — мультипликативная группа поля PE_n ; H_{p^v} состоит из всех таких h , что $h(u_j) = \eta_j u_j$, $\eta_j \in P$; $\eta_j^{p^v} = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$ **; N_{p^v} — максимальная транзитивная нильпотентная подгруппа симметрической группы S_{p^v} , перемещающей базисные векторы $u_1, \dots, u_n$ ***. Легко проверить, что $N_{p^v} H_{p^v}$ — локально-конечная p -группа. Отсюда вытекает локальная нильпотентность Γ_{p^v} .

Лемма 4. Любая локально-нильпотентная неприводимая подгруппа $GL(p^v, P)$ сопряжена в $GL(p^v, P)$ с некоторой подгруппой группы Γ_{p^v} , определяемой равенством (2).

Доказательство. Пусть Γ — локально-нильпотентная неприводимая подгруппа $GL(p^v, P)$. Будем считать, что $\Gamma \supset M$. Тогда $\Gamma = \mathfrak{G}M$, где $\mathfrak{G} = \Gamma \cap SL(n, P)$. В силу леммы 2, $\mathfrak{G}$ — локально-конечная p -группа. Согласно лемме 3, в пространстве $P^{(n)}$, где действует Γ , можно выбрать такой базис $u_1, u_2, \dots, u_n$ ($n = p^v$), что для $g \in \Gamma$ $g(u_1) = \gamma_1 u_{i_1}$, $g(u_2) = \gamma_2 u_{i_2}$, $\dots$, $g(u_n) = \gamma_n u_{i_n}$, $\gamma_j \in P$. В $\mathfrak{G}$ есть такие элементы $g_1, g_2, \dots, g_n$, что $g_1(u_1) = u_1$, $g_2(u_1) = \beta_2 u_2, \dots$, $g_n(u_1) = \beta_n u_n$, $\beta_j \in P$. Теперь несколько изменим базис $P^{(n)}$: вместо $u_1, u_2, \dots, u_n$ возьмем $v_1, v_2, \dots, v_n$, где $v_1 = u_1$, $v_2 = g_2(u_1), \dots$, $v_n = g_n(u_1)$. Пусть теперь $a \in \mathfrak{G}$, тогда $a(v_1) = \alpha_1 v_1$, $a(v_2) = \alpha_2 v_2, \dots$, $a(v_n) = \alpha_n v_n$. Покажем, что α_ρ , $\rho = 1, 2, \dots, n$, являются корнями уравнений вида $x^{p^v} = 1$. Действительно, $g_\rho(v_1) = v_\rho$, $g_{i_\rho}(v_1) = v_{i_\rho}$. Если $b = g_\rho g_{i_\rho}^{-1} a$, то $b(v_\rho) = \alpha_\rho v_\rho$, $b \in \mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{G}$ является p -группой, то $b^{p^v}(v_\rho) = \alpha_\rho^{p^v} v_\rho = v_\rho$. Отсюда $\alpha_\rho^{p^v} = 1$. Таким образом, $a \in \mathfrak{G}$ представимо в виде $a = th$, где $h(v_\rho) = \alpha_\rho v_\rho$, $\rho = 1, 2, \dots, n$, $h \in H_{p^v}$, $t \in N_{p^v}$ (см. предыдущую сноску). Лемма доказана. Следовательно, Γ_{p^v} — максимальная неприводимая локально-нильпотентная подгруппа $GL(p^v, P)$

* Если характеристика поля P делит число n , то в $GL(n, P)$ нет локально-нильпотентных неприводимых подгрупп.

** H_{p^v} , следовательно, прямое произведение p^v групп типа p^∞ .

*** Максимальные транзитивные нильпотентные подгруппы S_n сопряжены в $S_n^{(1)}$.

и все максимальные локально-нильпотентные приводимые подгруппы $GL(p^v, P)$ сопряжены между собой.

Пусть теперь $n = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_k^{v_k}$, где p_j — различные простые числа, $k > 1$. Обозначим через Γ_n группу всех матриц вида

$$\lambda \sigma_1 \times \sigma_2 \times \dots \times \sigma_k, \quad (3)$$

где λ — произвольный отличный от нуля элемент поля P ; σ_j — произвольная матрица из $N_{p_j^{v_j}} H_{p_j^{v_j}}$; $\times$ знак кронекеровского произведения

матриц. Очевидно, Γ_n — локально-нильпотентная подгруппа $GL(n, P)$. Теперь покажем, что любая неприводимая локально-нильпотентная подгруппа $GL(n, P)$ сопряжена с некоторой подгруппой группы Γ_n . Мы можем считать, что $\Gamma = \mathfrak{G}M$, где $\mathfrak{G} = \Gamma \cap SL(n, P)$. В силу леммы 2, $\mathfrak{G}$ — прямое произведение k групп $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$, где Π_j — p_j -подгруппа Силова группы $\mathfrak{G}$. Запишем $\mathfrak{G}$ в виде $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \Pi_k$, где $\mathfrak{H} = \Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_{k-1}$. Π_k приводима, все неприводимые блоки Π_k имеют одну и ту же степень $m = p_k^\alpha$, $\alpha \leq v_k$. Пространство $P^{(n)}$, в котором действует $\mathfrak{G}$, можно представить так:

$$L_1 + h_2(L_1) + \dots + h_{\frac{n}{m}}(L_1),$$

где $h_j \in \mathfrak{H}$; $L_1, L_j = h_j(L_1)$, $j = 2, \dots, \frac{n}{m}$, — инвариантные неприводимые относительно Π_k подпространства. Π_k индуцирует в $L_1, L_2, \dots, L_{\frac{n}{m}}$ эквивалентные представления. Действительно, пусть

$v_1, v_2, \dots, v_m$ — базис L_1 , тогда в качестве базиса $L_j = h_j(L_1)$ возьмем векторы $u_1 = h_j(v_1), u_2 = h_j(v_2), \dots, u_m = h_j(v_m)$. Если $f \in \Pi_k$ и $f(v_i) = \alpha_i^f v_i$, то $f(u_i) = f h_j(v_i) = h_j f(v_i) = h_j(\alpha_i^f v_i) = \alpha_i^f u_i$. Следовательно, в соответствующем базисе матрица $f \in \Pi_k$ принимает вид $f = E_{\frac{n}{m}} \times \sigma_k$,

где σ_k — матрица порядка $m = p_k^\alpha$. Матрицы $h \in \mathfrak{H}$ перестановочны с каждой матрицей f и, следовательно, имеют вид $h = \tau \times E_m$, где τ — матрица порядка $\frac{n}{m}$.

Из неприводимости $\mathfrak{G}$ следует неприводимость представления $h \rightarrow \tau$. В силу леммы 3, $\mathfrak{H}$ обладает абелевым нормальным делителем, фактор-группа по которому изоморфна транзитивной подгруппе симметрической группы $S_{\frac{n}{m}}$. Следовательно, в $\frac{n}{m}$ входят только простые

числа $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$, т. е. $m = p_k^{v_k}$.

Итак, для $g \in \mathfrak{G}$ можно написать

$$g = \tau \times \sigma_k, \quad \sigma_k \in N_{p_k^{v_k}} H_{p_k^{v_k}}$$

(см. лемму 4).

Применяя эти рассуждения к группе T , пробегаемой матрицей τ , придем к равенству

$$g = \sigma_1 \times \sigma_2 \times \dots \times \sigma_k,$$

$$g \in \mathfrak{G}, \quad \sigma_j \in N_{p_j^{v_j}} H_{p_j^{v_j}}.$$

Следовательно, $\Gamma = \mathfrak{G}M$ сопряжена в $GL(n, P)$ с некоторой подгруппой Γ_n . Отсюда вытекает

Теорема. Все максимальные локально-нильпотентные неприводимые подгруппы $GL(n, P)$ сопряжены в $GL(n, P)$. Любая локально-

нильпотентная неприводимая подгруппа $GL(n, P)$ содержится в одной из максимальных локально-нильпотентных подгрупп $GL(n, P)$.

Матрицы максимальной локально-нильпотентной неприводимой подгруппы $GL(n, P)$ приводятся к виду (3).

Автор выражает глубокую благодарность А. И. Мальцеву за обсуждение вопросов, связанных с настоящей статьей.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
1 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Д. Супруненко, ДАН, 99, № 1 (1954). ² Д. Супруненко, Уч. зап. БГУ им. В. И. Ленина, в. 15, 3 (1953).