

С. Б. СТЕЧКИН

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 11 I 1955)

1. Одна из основных задач, относящихся к проблеме абсолютной сходимости ортогональных рядов, состоит в следующем. Пусть $\Phi \equiv \{\varphi_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) есть ортонормированный базис гильбертова пространства L^2 , $f \in L^2$ и

$$f = \sum c_n \varphi_n = \sum (f, \varphi_n) \varphi_n \quad (1)$$

разложение элемента f в ортогональный ряд по системе Φ . Требуется исследовать, при каких ограничениях на элемент f сходится ряд

$$\sum |c_n|. \quad (2)$$

Положим $s_0 = \theta$ (где θ — нулевой элемент пространства L^2),

$$s_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k, \quad E_n(f, \Phi)_{L^1} = \|f - s_{n-1}\|_{L^1} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2 \right\}^{1/2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

так что $E_n(f, \Phi)_{L^1}$ есть наилучшее приближение элемента f посредством полиномов

$$\Phi_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} d_k \varphi_k$$

порядка $n-1$ по системе Φ . В моей работе (1, 2) доказана такая теорема:

1. Для сходимости ряда (2) достаточно, чтобы сходиллся ряд

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} E_n(f, \Phi)_{L^1}. \quad (3)$$

В настоящей работе дается в известном смысле полное решение поставленной задачи.

2. Сходимость или расходимость ряда (2) не зависит от порядка его членов, т. е. от порядка следования элементов системы Φ . Поэтому и естественные условия сходимости ряда (2) должны обладать той же инвариантностью. В связи с этим мы введем одно новое понятие. Рассмотрим всевозможные n -членные полиномы по системе Φ

$$\Phi_{(n)} = \sum_{l=1}^n d_{k_l} \varphi_{k_l} \quad (\Phi_{(0)} = \theta),$$

* Здесь и в дальнейшем суммирование с не указанными пределами производится от 1 до ∞ .

где номера $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ могут быть совершенно произвольными, и положим

$$e_n(f, \Phi)_{L^1} = \inf_{\Phi_{(n-1)}} \|f - \Phi_{(n-1)}\|_{L^1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Числа $e_n(f, \Phi)_{L^1}$ естественно называть наилучшими квадратическими приближениями элемента f посредством $(n-1)$ -членных полиномов по системе Φ . Очевидно, они обладают требуемой инвариантностью.

Нижняя грань в формуле (4) всегда достигается для некоторого полинома $\Phi_{(n-1)}^*$ (не обязательно единственного) и

$$e_n(f, \Phi)_{L^1} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 - \sum_{i=1}^{n-1} c_{k_i}^2 \right\}^{1/2}, \quad (5)$$

где коэффициенты c_{k_i} выбираются из условия

$$|c_k| \leq |c_{k_i}| \quad (k \neq k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (6)$$

Хотя это условие и не всегда однозначно определяет номера $\{k_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), оно полностью определяет значения $e_n(f, \Phi)_{L^1}$. Очевидно, всегда

$$e_n(f, \Phi)_{L^1} \leq E_n(f, \Phi)_{L^1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

и равенства

$$e_n(f, \Phi)_{L^1} = E_n(f, \Phi)_{L^1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

имеют место в том и только том случае, если $|c_n| \downarrow 0^*$. Из этого замечания непосредственно вытекает, что

$$e_n(f, \Phi)_{L^1} = E_n(f, \bar{\Phi})_{L^1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

где система $\bar{\Phi}$ получается из системы Φ такой перестановкой, что $f = \sum \bar{c}_n \bar{\varphi}_n$ и $|\bar{c}_n| \downarrow 0$.

3. Основная теорема. Для того чтобы сходиллся ряд (2), необходимо и достаточно, чтобы сходиллся ряд

$$\sum \frac{1}{V^n} e_n(f, \Phi)_{L^1}. \quad (9)$$

Наметим доказательство этой теоремы. Мы опираемся на следующую лемму о числовых рядах:

Лемма 1. Пусть $u_n \neq 0$, $u_n \downarrow 0$, $\sum u_n < \infty$ и $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$. Тогда

$$\frac{1}{2} \sum \sqrt{\frac{r_n}{n}} \leq \sum \sqrt{u_n} \leq \frac{2}{V^3} \sum \sqrt{\frac{r_n}{n}}. \quad (10)$$

Второе из этих неравенств известно. (См. ^(1,2), лемма 3, а также ⁽³⁾, теорема 345, где, впрочем, константа несколько хуже (V^2).)

* Как обычно, запись $a_n \downarrow 0$ означает, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ и $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Я предполагаю, что наилучшая константа в первом неравенстве равна $2/\pi$, но мне не удалось это доказать.

Полагая в лемме 1 $u_n = c_n^2$, получаем:

II. Пусть $|c_n| \downarrow 0$. Тогда ряды (2) и (3) сходятся и расходятся одновременно; точнее:

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{V^n} E_n(f, \Phi)_{L^1} \leq \sum |c_n| \leq \frac{2}{V^3} \sum \frac{1}{V^n} E_n(f, \Phi)_{L^1}. \quad (11)$$

Это предложение представляет самостоятельный интерес и имеет простую геометрическую интерпретацию. В гильбертовом пространстве L^2 зафиксируем орты $\{\varphi_n\}$ и построим единичную сферу $S_{L^2} (\sum c_n^2 = 1)$, а также единичную сферу $S_A (\sum |c_n| = 1)$ пространства A , для которого $\|f\|_A = \sum |c_n|$. S_A представляет собой поверхность бесконечномерного «октаэдра», вписанного в сферу S_{L^2} . Теорема II утверждает, что если рассмотреть поверхность

$$P \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2} = 1 \right),$$

то на тех участках S_A , для которых выполняются условия $|c_n| \downarrow 0$ эта поверхность достаточно хорошо аппроксимирует S_A . Точнее, если $f \in P$ и $|c_n| \downarrow 0$, то $\frac{1}{2} \leq \|f\|_A \leq \frac{2}{V^3}$.

Для завершения доказательства основной теоремы остается расположить члены ряда (1) в порядке убывания модулей их коэффициентов и воспользоваться теоремой II. Поверхность

$$Q \left(\sum \frac{1}{V^n} e_n(f, \Phi)_{L^1} = 1 \right)$$

склеивается из кусков поверхностей P , построенных при соответствующей перенумерации ортов, и аппроксимирует уже всю сферу S_A .

4. Укажем несколько приложений основной теоремы. Прежде всего, учитывая (7), сразу получаем теорему I. Аналогично убеждаемся в справедливости следующего предложения (ср. (1, 2), теорема 3):

III. Пусть $N = \{\mu_k\}$ — возрастающая последовательность номеров. Тогда

$$\sum |c_{\mu_k}| \leq \frac{2}{V^3} \sum \frac{1}{V^{\mu_k}} E_{\mu_k}(f, \Phi)_{L^1}. \quad (12)$$

Сфера S_A определена лишь для тех направлений λf , для которых существует последовательность $\mu_n \rightarrow \infty$ такая, что

$$\sum \mu_n^{-2} < \infty \quad \text{и} \quad \sum (\mu_n c_n)^2 < \infty; \quad (13)$$

последнее из этих условий означает, что $f_{\mu} = \sum \mu_n c_n \varphi_n \in L^2$. Наши методы позволяют полностью охарактеризовать ту часть сферы S_A , которая аппроксимируется поверхностью P :

IV. Для того чтобы сходимость ряда (2) влекла сходимость ряда (3), необходимо и достаточно, чтобы существовала монотонная последовательность $\mu_n \rightarrow \infty$, удовлетворяющая условиям (13).

Пусть теперь $\Phi \equiv \{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система функций на некотором отрезке $[a, b]$ с суммируемым и почти всюду положи-

тельным весом $p(x)$. Для ортогональных рядов по таким системам справедлива теорема:

V. Если сходится ряд (9) (или ряд (2)), то ряд (1) абсолютно сходится для почти всех $x \in [a, b]$.

См. также ⁽⁴⁾, где указаны условия на систему Φ , при выполнении которых справедливо обратное предложение, т. е. из абсолютной сходимости ряда (1) почти всюду вытекает сходимость ряда (2).

Переходим к рассмотрению абсолютной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе T . Итак, пусть $f(x) \in L^2[0, 2\pi]$,

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \sum \rho_n \cos(nx - \alpha_n) \quad (\rho_n \geq 0)$$

ее ряд Фурье и $\omega(\delta, f)_{L^2}$ — квадратический модуль непрерывности функции $f(x)$. Известно (см. ^(1, 2) или ⁽⁵⁾), что всегда

$$\sum \rho_n \leq CR, \quad \text{где } R = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \omega\left(\frac{1}{n}, f\right)_{L^2}. \quad (14)$$

Здесь мы укажем два результата противоположного характера.

VI. Пусть $f(x) \in L^2[0, 2\pi]$ и $\rho_n \downarrow 0$. Для того чтобы сходился ряд $\sum \rho_n$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд R .

VII. Пусть $f(x) \in L^2[0, 2\pi]$. Для того чтобы ряды $\sum \rho_n$ и R сходились и расходились одновременно, необходимо и достаточно, чтобы существовала монотонная последовательность $\mu_n \rightarrow \infty$, для которой

$$\sum \mu_n^{-2} < \infty \quad \text{и} \quad \sum (\mu_n \rho_n)^2 < \infty.$$

Последняя теорема полностью характеризует ту область, где поверхность $R=1$ аппроксимирует сферу S_A .

Использование в нашей задаче приближений в метрике L^2 , повидимому, неизбежно. Условие

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} e_n(f, T)_C < \infty,$$

где приближения берутся в метрике пространства C непрерывных функций, уже не является необходимым для сходимости ряда $\sum \rho_n$.

5. В заключение укажем на некоторые возможные обобщения. Все результаты этой работы переносятся на комплексное гильбертово пространство. Далее, совершенно аналогично рассматривается вопрос о сходимости рядов

$$\sum |c_n|^p \quad (0 < p < 2) \quad \text{и} \quad \sum F(|c_n|),$$

где $F(\sqrt{u})$ — вогнутая функция, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям. Наконец, можно предполагать, что Φ не ортонормированный базис, а так называемый базис Фишера — Рисса (по поводу этого понятия см. ⁽⁶⁻⁸⁾).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
7 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Б. Стечкин, Матем. сборн., **29** (71), 225 (1951). ² S. B. Stečkin, Am. Math. Soc. Transl., No. 89 (1953). ³ Г. Харди, Д. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, М., 1948. ⁴ S. Kaczmarz, H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa — Lwów, 1935. ⁵ O. Szász, Trans. Am. Math. Soc., **42**, 366 (1937). ⁶ Н. К. Бари, ДАН, **65**, № 5, 383 (1946). ⁷ Н. К. Бари, Уч. зап. МГУ, в. 148, 69 (1951). ⁸ И. М. Гельфанд, там же, стр. 224.