Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 1

МАТЕМАТИКА

Л. А. СКОРНЯКОВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕАССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ В АССОЦИАТИВНЫХ*

(Представлено академиком П. С. Александровым 8 I 1955)

Для сокращения записи введем ряд вспомогательных определений и обозначений. Пусть $\overline{K}$ — произвольное кольцо** с кольцом операторов Ω. Элемент $\varepsilon \in \overline{K}$ называется присоединенной единицей, если $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$ для всякого $\alpha \in \overline{K}$ и $\overline{K}^+ = K^+ + \Omega\varepsilon$ ***, где K — идеал кольца $\overline{K}$. Очевидно, каждое кольцо K с кольцом операторов Ω можно погрузить в кольцо $\overline{K}$ с присоединенной единицей ε так, что $\overline{K}^+ = K^+ + \Omega\varepsilon$. Далее обозначим через R_α и назовем правым умножением на $\alpha \in \overline{K}$ эндоморфизм группы $\overline{K}^+$, определяемый соотношением $\beta R_\alpha = \beta\alpha$. Через $M(K)$ обозначим множество таких правых умножений R_α, что $\alpha \in K$. Множество $M(K) + \Omega R_\varepsilon$ порождает в кольце всех эндоморфизмов группы $\overline{K}^+$ подкольцо $R(\overline{K})$, называемое кольцом правых умножений кольца $\overline{K}$. Правый идеал кольца $R(\overline{K})$, порожденный элементами вида $R_\alpha R_\beta - R_{\alpha\beta}$, обозначим через $N(\overline{K})$. Смайли ([1], лемма 2) показал, что $R(\overline{K})^+ = M(K) + \Omega R_\varepsilon + N(\overline{K})^+$. Фактор-кольцо кольца $R(\overline{K})$ по максимальному идеалу D, лежащему в $N(\overline{K})$, обозначим через $Q(\overline{K})$. Очевидно, $Q(\overline{K})^+ = M(K) + \Omega R_\varepsilon + C(\overline{K})^+$, где $C(\overline{K}) = N(\overline{K})/D$. Так как $M(K) + C(\overline{K})^+$ является идеалом кольца $Q(\overline{K})$, то R_ε является в нем присоединенной единицей.

Лемма 1. *$N(\overline{K})$ совпадает с множеством N' элементов кольца $R(\overline{K})$, переводящих ε в 0.*

Доказательство. Очевидно, что $N(\overline{K}) \subset N'$. Пусть $\nu' \in N'$. Как было отмечено, $\nu' = R_\alpha + \nu$, где $\alpha \in \overline{K}$, $\nu \in N(\overline{K})$. Отсюда $0 = \varepsilon\nu' = \varepsilon\alpha = \alpha$, т. е. $\nu' \in N(\overline{K})$.

Пусть теперь $\overline{A}$ — ассоциативное кольцо с присоединенной единицей e; B и C — подгруппы $\overline{A}^+$ такие, что $\overline{A}^+ = B + \Omega e + C$. Если $a \in \overline{A}$, то обозначим через $B(a)$ проекцию элемента a в B. Группу B можно превратить в кольцо K, сохранив имеющееся в ней сложение, а произведение элементов b', $b'' \in B$ определить соотношением $b' \circ b'' = B(b'b'')$. Про кольцо K будем говорить, что оно представлено в кольце $\overline{A}$ парой (B, C). Представление называется стандартным, если подкольцо кольца $\overline{A}$, порожденное группой $B + \Omega e$, совпадает с $\overline{A}$, C является правым идеалом кольца $\overline{A}$ и не содержит нетривиальных идеалов кольца $\overline{A}$.

* Автор выражает глубокую признательность А. Г. Курошу за ряд ценных замечаний.

** Если не оговорено противное, кольцо не предполагается ассоциативным.

*** Через K^+ обозначается аддитивная группа кольца K.

Теорема 1. *Всякое кольцо K допускает стандартное представление в кольце $Q(\bar{K})$ парой $(M(K), C(\bar{K}))$.*

Доказательство. Как уже отмечалось, $Q(\bar{K})^+ = M(K) + \Omega R_\varepsilon + C(\bar{K})$. Так как $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha\beta} + (R_\alpha R_\beta - R_{\alpha\beta})$, то $R_\alpha \circ R_\beta = R_{\alpha\beta}$. Ввиду наличия в $\bar{K}$ единицы $R_\alpha = 0$ влечет $\alpha = 0$. Поэтому отображение $\alpha \to R_\alpha$, $\alpha \in K$, является изоморфным * отображением кольца K на кольцо $M(K)$ с умножением $\circ$.

Теорема 2. *Пусть $\bar{A}_i$, $i = 1, 2$, — ассоциативное кольцо с кольцом операторов Ω и присоединенной единицей e_i; кольцо K_i представлено в ассоциативном кольце $\bar{A}_i$ парой (B_i, C_i); существует изоморфизм φ кольца $\bar{A}_1$ на кольцо $\bar{A}_2$, отображающий B_1 на B_2, e_1 на e_2 и C_1 на C_2. Тогда кольца K_1 и K_2 изоморфны.*

Для доказательства достаточно заметить, что $\varphi(B_1(a_1)) = B_2(\varphi(a_1))$ для всякого $a_1 \in A_1$.

Обращение теоремы 2 может быть осуществлено в следующей форме:

Теорема 3. *Если кольцо K допускает стандартные представления в ассоциативных кольцах $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ парами (B_1, C_1) и (B_2, C_2), соответственно, а e_i — присоединенная единица кольца $\bar{A}_i$, $i = 1, 2$, то существует изоморфизм кольца $\bar{A}_1$ на кольцо $\bar{A}_2$, отображающий B_1 на B_2, e_1 на e_2, C_1 на C_2.*

Теорема 3 является непосредственным следствием такого утверждения:

Теорема 4. *Пусть кольцо K имеет стандартное представление в ассоциативном кольце $\bar{A}$ парой (B, C) и e — присоединенная единица кольца $\bar{A}$. Тогда существует изоморфизм кольца $\bar{A}$ на кольцо $Q(\bar{K})$, отображающий B на $M(K)$, e на R_ε, C на $C(\bar{K})$.*

В ходе доказательства будем обозначать элемент β из $\bar{K}$, рассматриваемый как элемент из $\bar{B} = B + \Omega e$, соответствующей латинской буквой b.

Лемма 2. *Если $\beta_i \in \bar{K}$, то $\varepsilon R_{\beta_1} \ldots R_{\beta_n} = B(b_1 \ldots b_n)$.*

Доказательство. При $n = 1$ имеем: $\varepsilon R_{\beta_1} = e \circ b_1 = B(eb_1) = B(b_1)$. Если лемма доказана для $n - 1$, то для подходящего c из C будем иметь:

$$\varepsilon R_{\beta_1} \ldots R_{\beta_n} = (\varepsilon R_{\beta_1} \ldots R_{\beta_{n-1}}) R_{\beta_n} = B(b_1 \ldots b_{n-1}) \circ b_n =$$

$$= B((b_1 \ldots b_{n-1} + c) b_n) = B(b_1 \ldots, b_n) + B(cb_n).$$

Так как C — правый идеал (ведь представление K в $\bar{A}$ стандартно), то $B(cb_n) = 0$, что и требовалось.

Рассматривая элементы групп $\bar{B}$ и $\bar{M} = M(K) + \Omega R_\varepsilon$ как свободные образующие, построим, соответственно, свободные кольца O и O'. Через T' обозначим такой идеал кольца O', что $O'/T' = Q(\bar{K})$. Так как представление K в $\bar{A}$ стандартно, то найдется также такой идеал T кольца O, что $O/T = \bar{A}$. Пусть ψ — естественный гомоморфизм кольца O на $\bar{A}$, а ψ' — естественный гомоморфизм кольца O' на $Q(\bar{K})$. Так как $\bar{B}$ и $\bar{M}$ изоморфны $\bar{K}^+$, то существует изоморфизм φ такой, что $\varphi(O) = O'$, причем $\varphi(b) = R_\beta$, если $b \in \bar{B}$. Введенные обозначения позволяют легко вывести из леммы 2 следующую лемму:

Лемма 3. *Если $\tau \in O$, то $B(\psi(\tau)) = \varepsilon\psi'(\varphi(\tau))$.*

---

* Здесь и ниже всегда имеется в виду операторный изоморфизм. То же относится к гомоморфизму.

Лемма 4. *Если* $\tau \in O$ *и* $\psi(\tau) \in C$, *то* $\psi'(\varphi(\tau)) \in C(\overline{K})$.
Действительно, из леммы 3 имеем:

$$\varepsilon\psi'(\varphi(\tau)) = B(\psi(\tau)) = 0,$$

после чего достаточно применить лемму 1.

Лемма 5. *Если* $\tau' \in O'$ *и* $\psi'(\tau') \in C(\overline{K})$, *то* $\psi(\varphi^{-1}(\tau')) \in C$.
Как и выше, леммы 3 и 1 дают:

$$B(\psi(\varphi^{-1}(\tau'))) = \varepsilon\psi'(\tau') = 0.$$

Лемма 6. $\varphi(T) = T'$.

Доказательство. Если $\tau \in T$, то $\psi(\tau) = 0 \in C$. Поэтому лемма 4 дает: $\psi'(\varphi(T)) \subset C(\overline{K})$. Разумеется, $\psi'(\varphi(T))$ есть идеал кольца $Q(\overline{K})$. Так как в $C(\overline{K})$ ненулевых идеалов кольца $Q(\overline{K})$ нет, $\psi'(\varphi(T)) = 0$, т. е. $\varphi(T) \subset T'$. Аналогичные соображения с использованием леммы 5 и стандартности представления кольца K в $\overline{A}$ дают: $\varphi^{-1}(T') \subset T$. Следовательно, $\varphi(T) \subset T' \subset \varphi(T)$, т. е. $\varphi(T) = T'$.

Приступая к доказательству теоремы 4, заметим, что, согласно лемме 6, φ можно рассматривать как изоморфизм кольца $\overline{A} = O/T$ на кольцо $Q(\overline{K}) = O'/T'$. При этом, очевидно, $\varphi(B) = M(K)$, $\varphi(e) = R_\varepsilon$. Из лемм 4 и 5 нетрудно вывести, что $\varphi(C) = C(\overline{K})$.

Отметим простейшие связи между свойствами колец K и $\overline{A}$:

Теорема 5. *Пусть кольцо* K *представлено в кольце* $\overline{A}$ *парой* (B, C). *Тогда*: 1) *кольцо* K *не содержит делителей нуля тогда и только тогда, если* C *не содержит произведений двух элементов из* B; 2) *если* C *— правый идеал кольца* $\overline{A}$ *и* $\overline{A}$ *порождено множеством* $B + \Omega e$, *то структура правых идеалов кольца* K *изоморфна структуре правых идеалов кольца* $\overline{A}$, *содержащих* C *и содержащихся в* A. *При этом правому идеалу* I *кольца* K *соответствует правый идеал* I^* *кольца* $\overline{A}$, *состоящий из элементов вида* $d + c$, *где* $d \in I^*$, $c \in C$. *Правый идеал* I *оказывается двусторонним, если* $B(bd) \in I$ *для любых* $b \in B$, $d \in I$; 3) *если представление стандартно, то единица в* K *существует одновременно с единицей в* A.

Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго отметим, что соответствующая теорема для случая, когда $\overline{A} = R(\overline{K})$, доказана в [1] (теорема 2 и замечание на стр. 141). После этого остается заметить, что в фактор-кольце кольца $\overline{A}$ по максимальному идеалу, содержащемуся в C, кольцо K представляется стандартно, и применить теорему 4. Справедливость третьего утверждения вытекает из того, что R_1, где 1 — единица кольца K, является единицей в кольце $R(\overline{K})$.

Замечание. Изложенную теорию можно упростить, если рассматривать только кольца K с левой единицей. Тогда отпадает необходимость требовать существования присоединенной единицы в ассоциативных кольцах. Изменения, которые в рассматриваемом случае следует внести в определение представления и его стандартности, очевидны. Кроме того следует всюду вместо кольца $R(\overline{K})$ рассматривать кольцо $R(K)$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Smiley, Proc. Am. Math. Soc., 2, 138 (1951).

* Соответствующие элементы из K и B обозначаются одной и той же буквой.