Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 1

МАТЕМАТИКА

Академик И. Г. ПЕТРОВСКИЙ и Е. М. ЛАНДИС

О ЧИСЛЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ УРАВНЕНИЯ $\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, ГДЕ M И N — ПОЛИНОМЫ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Заметка посвящена вопросу об оценке сверху числа предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{M}{N}$, где M и N — многочлены второй степени.

Рассмотрим комплексное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}. \tag{1}$$

P и Q — полиномы второй степени с вообще говоря комплексными коэффициентами. Пространство (x, y) — комплексное проективное пространство. Соответствующее действительное четырехмерное пространство будем обозначать через R_4. В R_4 мы введем компактную метрику.

Под решением $y=\varphi(x)$ уравнения (1) мы будем понимать полную аналитическую функцию (аналитическое продолжение по Вейерштрассу элемента решения). Интегральной кривой будем называть график Ф функции $y=\varphi(x)$ в R_4. Кроме обыкновенных точек, к Ф мы будем причислять также полюса и точки ветвления конечного порядка.

Замкнутую одномерную кривую (топологическую окружность), лежащую на Ф, будем называть циклом.

Рассмотрим теперь действительное уравнение

$$\frac{dy^*}{dx^*}=\frac{M(x^*,y^*)}{N(x^*,y^*)}; \tag{1*}$$

x^* и y^* — действительные переменные, M и N — полиномы второй степени с действительными коэффициентами. Интегральные кривые этого уравнения можно рассматривать как результат пересечения действительной плоскостью ($\operatorname{Im} x=0$, $\operatorname{Im} y=0$) интегральных кривых комплексного уравнения (1) в случае, когда коэффициенты полиномов, стоящих в правой части, принимают данные действительные значения и $x=x^*+ix^{**}$, $y=y^*+iy^{**}$. Будем говорить, что такое комплексное уравнение (1) соответствует данному действительному уравнению (1*).

Лемма 1. *Предельный цикл действительного уравнения* (1*) *является циклом, не гомологичным нулю на интегральной кривой соответствующего комплексного уравнения* (1).

Два предельных цикла действительного уравнения (1*), *лежащие на одной и той же интегральной кривой соответствующего комплексного уравнения* (1), *не гомологичны между собой.*

Назовем цикл L, лежащий на интегральной кривой уравнения (1), простым, если его проекции на плоскости x и y не имеют самопересечений. Скажем, что циклы $L_1, \ldots, L_k$, лежащие на интегральных кривых уравнения (1), правильно расположены, если проекции на плоскость x попарно не пересекаются.

Лемма 2. *Максимальное число предельных циклов уравнения* (1*) *не больше, чем максимальное число не гомологичных нулю и между собой простых правильно расположенных циклов уравнения* (1).

Обозначим через D пространство коэффициентов P и Q уравнения (1) (12-мерное комплексное или 24-мерное действительное пространство).

Лемма 3. *Существует область U в пространстве D, для каждой точки которой имеется не более 3 правильно расположенных простых циклов, не гомологичных нулю и не гомологичных друг другу.*

Схема доказательства этой леммы такова.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(y-1)}{x(x-1)}. \tag{2}$$

Пусть этому уравнению отвечает точка $\alpha^* \in D$. Можно показать, что существует такая окрестность $V(\alpha^*)$ точки α^*, что если $\alpha \in V(\alpha^*)$ и $L_1, \ldots, L_k$ — не гомологичные нулю и не гомологичные между собой простые правильно расположенные циклы, лежащие на решениях уравнения (1), отвечающего точке α, то найдется последовательность $\{\alpha_n\}$ точек $\alpha_n \in D$, стремящаяся к α^*, и такая константа M, что для каждого n на решениях уравнения (1), отвечающего α_n, лежат k не гомологичных нулю и не гомологичных друг другу правильно расположенных циклов, $L_1(\alpha_n), \ldots, L_k(\alpha_n)$, обладающих тем свойством, что проекции каждого из них на одну из плоскостей x или y не имеют самопересечений, а их длины ограничены константой M. Далее из последовательности $\{\alpha_n\}$ можно выбрать последовательность $\{\alpha_{n_m}\}$ такую, чтобы $L_i(\alpha_{n_m})$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ сходились при $m \to \infty$ как кривые в пространстве R_4.

Предельные кривые $L_1, \ldots, L_k$ суть замкнутые кривые, лежащие на комплексных интегральных кривых уравнения (2). $L_i(\alpha_n)$ можно выбрать так, что L_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ не будет проходить через особые точки уравнения (2) и проекция на одну из координатных плоскостей x или y не будет иметь пересечений и самопересечений. Кроме того, выберем подпоследовательность $\{\alpha_{n_m}\}$ так, чтобы она сходилась к α^*, касаясь некоторой комплексной прямой $\alpha = \alpha^* + A\tau$ в пространстве D.

Пусть проекция C_i кривой L_i на плоскость x не имеет самопересечений. Пусть (x^0, y^0) — некоторая точка на L_i и $y(x, \tau)$ — решение уравнения (1), соответствующего точке $\alpha = \alpha^* + A\tau \in D$, проходящее через точку (x^0, y^0).

Рассмотрим приращение функции $\left.\frac{\partial y}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}$ при обходе вокруг C_i. Это приращение равно

$$\exp\left[\int_{C_i}\left(\frac{P}{Q}\right)'_y dx\right]\int_{C_i}\exp\left[-\int_{x^0}^{x}\left(\frac{P}{Q}\right)'_y dx\right]\left(\frac{P}{Q}\right)'_\tau dx. \tag{3}$$

С другой стороны, это приращение должно быть равно нулю, откуда

$$\int_{C_i}\exp\left[-\int_{x^0}^{x}\left(\frac{P}{Q}\right)'_y dx\right]\left(\frac{P}{Q}\right)'_\tau dx = 0. \tag{4}$$

Производя соответствующие вычисления, находим из (4)

$$\int_{C_i} \frac{(x-c)^2}{x(x-1)} \frac{x(x-1)M_1 + y(y-1)M_2}{(x(x-1))^2} dx = 0, \tag{5}$$

где M_1 и M_2 — многочлены 2-й степени, коэффициенты которых служат компонентами вектора A, а c — константа из общего решения

$$y = \frac{c(x-1)}{x-c} \tag{6}$$

уравнения (2).

Пусть на решении уравнения (2), отвечающем некоторому значению c в (6), расположены две замкнутые кривые L' и L''. Пусть их проекции C' и C'' на плоскость x не имеют самопересечений и не разделены точками 0, 1, c и ∞. Тогда L' и L'' не могут служить пределами последовательностей $\{L_i(\alpha_{n_m})\}$ и $\{L_j(\alpha_{n_m})\}$ циклов, не гомологичных друг другу.

Отсюда следует, что для того чтобы оценить сверху число не гомологичных друг другу циклов в $V(\alpha^*)$, нам надо рассмотреть замкнутые кривые C, охватывающие различные комбинации точек 0, 1, c и ∞, и найти число значений c, при которых для каждой из этих кривых выполняется равенство (5). Этот подсчет легко произвести, учитывая, что вычеты подинтегральной функции (5) суть многочлены относительно c. Производя этот подсчет и учитывая также решения уравнения (2), не вошедшие в общее решение (6), мы находим, что всего на решениях уравнения (2) может быть 14 кривых, служащих пределами для последовательностей $\{L_i(\alpha_{n_m})\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Но через каждую особую точку уравнения (1) (за исключением множества уравнений, имеющего размерность на одну комплексную единицу меньше чем D) проходит два особых решения, для которых эта точка является обыкновенной. На таком решении в окрестности особой точки лежит цикл, гомологичный нулю, но охватывающий эту точку. Уравнение (1) имеет 7 особых точек: 4 конечных и 3 бесконечных. Одно из особых решений, проходящих через каждую бесконечную особую точку, есть бесконечно удаленная прямая. Кривые на решениях уравнения (2), предельные для этих циклов, лежащих на особых решениях, отличных от бесконечно удаленной прямой и охватывающих особые точки, также окажутся в числе найденных нами 14. Следовательно, из этого числа 14 надо исключить 11 кривых, соответствующих циклам, гомологичным нулю. Получаем, что циклов, не гомологичных нулю и друг другу, не больше 3. Эти рассуждения справедливы для всех векторов A, по крайней мере в целой окрестности некоторого вектора. Следовательно, в окрестности $V(\alpha^*)$ есть целый телесный угол, в котором каждое уравнение имеет не более 3 правильных циклов, не гомологичных нулю и друг другу. Его мы и примем за область U.

Лемма 4. *Существует множество $N \subset D$, не разделяющее D, такое, что для любой точки $\alpha \in D - N$ число простых правильно расположенных не гомологичных друг другу циклов постоянно.*

Доказательство леммы проводится по следующей схеме. Доказывается, что из D можно исключить такое множество N_1, $\dim N_1 = 22$, что если Γ — простая дуга в $D - N_1$ и для некоторой точки $\alpha_0 \in \Gamma$ соответствующее уравнение (1) имеет k не гомологичных нулю и не гомологичных между собой простых правильно расположенных циклов $L_1, \ldots, L_k$, то в некоторой окрестности этой точки на кривой Γ для каждой точки α также существует k не гомологичных между собой простых правильно расположенных циклов: $L_1(\alpha), \ldots, L_k(\alpha)$. При этом

циклы $L_1(\alpha), \ldots, L_k(\alpha)$, как кривые в пространстве R_4, меняются непрерывно при движении α по Γ и $L_i(\alpha_0) = L_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Затем показывается, что из D можно исключить еще такое множество N_2 размерности 22, что если Γ — простая дуга, лежащая в $D - N_2$ с концами в точках α_1 и α_2, и для всех точек Γ, кроме α_2, существует k не гомологичных нулю и не гомологичных друг другу простых правильно расположенных циклов $L_1(\alpha), \ldots, L_k(\alpha)$ таких, что они, как кривые в R_4, меняются непрерывно при движении α по Γ, то им можно поставить в соответствие гомологичные циклы $L_1'(\alpha), \ldots$ $\ldots, L_k'(\alpha)$ так, что: a) $L_i(\alpha_1) = L_i'(\alpha_1)$, $i = 1, 2, \ldots, k$; b) $L_i'(\alpha)$ меняются непрерывно при движении α по Γ и c) при $\alpha \to \alpha_2$ циклы $L_1'(\alpha), \ldots, L_k'(\alpha)$ стремятся к простым циклам $L_1'(\alpha_2), \ldots, L_k'(\alpha_2)$, не гомологичным между собой и правильно расположенным.

В доказательстве существенную роль играют следующие два пункта:

1) Можно исключить из D такое множество N_2', $\dim N_2' = 22$, что если $\Gamma \subset D - N_2'$ — простая дуга с концами в точках α_1 и α_2 и для всех $\alpha \in \Gamma - (\alpha_2)$ существует простой цикл $L(\alpha)$, непрерывно меняющийся вдоль Γ, длина которого равномерно ограничена некоторой константой M, то при $\alpha = \alpha_2$ также существует простой цикл $L(\alpha_2)$, который может быть получен как предел циклов, гомологичных $L(\alpha)$.

2) Можно исключить из D такое множество N_2'', $\dim N_2'' = 22$, что если $\Gamma \subset D - N_2''$ — простая дуга с концами в точках α_1 и α_2 и для всех $\alpha \in \Gamma - (\alpha_2)$ существует простой цикл $L(\alpha)$, непрерывно меняющийся вдоль Γ, и если $l(\alpha)$ — нижняя грань длин простых циклов, гомологичных $L(\alpha)$, то $\overline{\lim\limits_{\alpha \to \alpha_2}} l(\alpha) < \infty$.

Из лемм 2, 3 и 4 мы получаем теорему:

Теорема. *Для уравнения* (1*) *существует не более* 3 *предельных циклов.*

Так как существуют уравнения вида (1*), имеющие 3 предельных цикла [1], то оценка, даваемая этой теоремой, точна.

Поступило
1 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Баутин, Матем. сборн., **30**, № 1, 181 (1952).