Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 2

ГИДРАВЛИКА

В. Н. ЩЕЛКАЧЕВ

УПРОЩЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ВКЛЮЧЕНИЕМ КРУГОВЫХ БАТАРЕЙ ИСТОЧНИКОВ И СТОКОВ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 13 XI 1954)

Будем считать, что стоки и источники соответствуют эксплуатационным и нагнетательным скважинам и будем решать задачу применительно к условиям подземной гидродинамики. В силу известных аналогий найденное решение оказывается справедливым и для соответствующих задач теории теплопроводности, теории дуффузии и т. д., т. е. для задач, которые сводятся к интегрированию дифференциального уравнения Фурье при условии, что в исследуемом плоском нестационарном поле включаются круговые батареи мгновенных или непрерывно действующих стоков или источников.

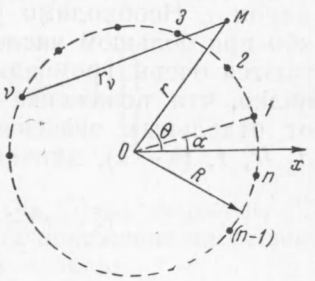


Рис. 1

В соответствующих условиях плоского движения упругой жидкости в упругом пласте пластовое давление $p(r, \theta, t)$ в любой момент времени t и в любой точке $M(r, \theta)$ пласта (за исключением особых точек) должно удовлетворять дифференциальному уравнению Фурье:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad (1)$$

где $\varkappa$ — постоянный коэффициент пьезопроводности пласта.

Считая, что в начальный момент времени $t = 0$ давление во всем пласте постоянно и равно p_0, определим понижение давления Δp, где $\Delta p = p_0 - p$, для условий следующих двух задач:

1. В начальный момент времени в равноудаленных друг от друга точках 1, 2, . . . , n, расположенных на окружности радиуса R (см. рис. 1) были включены мгновенные стоки одинаковой интенсивности τ, причем τ — конечное количество жидкости, мгновенно поглощенное каждым стоком.

2. В тех же точках в начальный момент были включены непрерывно действующие стоки с одинаковыми дебитами Q.

Вторая задача была исследована нами раньше ([1]), но здесь дается существенное уточнение прежнего решения, начальный ход которого повторяется.

Используя известное решение уравнения Фурье для одиночного мгновенного стока, применяя метод суперпозиции и раскладывая в ряд экспоненциальную функцию, понижение давления в пласте после вклю-

чения круговой батареи мгновенных стоков получим в следующем виде:

$$\Delta p = \frac{\tau\mu}{4\pi bkt}\sum_{\nu=1}^{n}\exp\left(-\frac{r_\nu^2}{4\varkappa t}\right) = \frac{\tau\mu}{4\pi bkt}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{(-1)^\sigma}{\sigma!\,(4\varkappa t)^\sigma}\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{2\sigma}, \tag{2}$$

Аналогичным путем, используя разложение в ряд интегральной экспоненциальной функции Ei, найдем понижение пластового давления после включения круговой батареи непрерывно действующих стоков:

$$\Delta p = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\sum_{\nu=1}^{n}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_\nu^2}{4\varkappa t}\right)\right] =$$

$$= \frac{Q\mu}{4\pi bk}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\ln\frac{4\varkappa t}{r_\nu^2} - nC + \sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{(-1)^\sigma}{\sigma\cdot\sigma!\,(4\varkappa t)^\sigma}\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{2\sigma}\right], \tag{3}$$

где μ — коэффициент вязкости жидкости; b и k — мощность и проницаемость пласта; C — постоянная Эйлера; r_ν — расстояние от точки $M(r, \theta)$, в которой определяется понижение давления, до стока с номером ν. Необходимо упростить решения (2) и (3) уравнения Фурье, ибо при большом числе стоков подсчеты по формулам (2) и (3) оказываются очень громоздкими и неудобными; кроме того, заранее очевидно, что понижение давления в точке $M(r, \theta)$ не должно зависеть от отдельных значений расстояний r_ν, а должно зависеть только от n, R, r, $(\theta - \alpha)$, причем

$$r_\nu^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\left[\frac{2\pi}{n}(\nu - 1) - (\theta - \alpha)\right]. \tag{4}$$

Определим при $n > 1$ величину суммы $\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{2\sigma}$ при помощи новой выведенной нами формулы, более точной, чем та, которая была указана в статьях ([1],[2]). Именно,

$$\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{2\sigma} = n\sigma!\left\{\sum_{\lambda=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}\frac{(r^2+R^2)^{\sigma-2\lambda}(rR)^{2\lambda}}{(\lambda!)^2(\sigma-2\lambda)!} + \right.$$

$$\left. +2\sum_{\eta=1}^{\mathrm{E}\left(\frac{\sigma}{n}\right)}\sum_{\lambda=n}^{\sigma}\frac{(-1)^\lambda(r^2+R^2)^{\sigma-\lambda}(rR)^\lambda\cos\left[\eta n\,(\theta-\alpha)\right]}{\left(\frac{\lambda-\eta n}{2}\right)!\left(\frac{\lambda+\eta n}{2}\right)!\,(\sigma-\lambda)!\,A}\right\}, \tag{5}$$

где $A = 2^{\mathrm{E}\left(1-\frac{\eta n}{\lambda}\right)}$ при n четном; $A = 1$ при n нечетном; $\mathrm{E}(x)$ — целая часть от числа x.

В двойной сумме во второй строке формулы (5) сохраняются лишь те члены, для которых $\lambda \geqslant \eta n$ и числа $(\lambda - \eta n), (\lambda + \eta n)$ суть четные числа. Поэтому, например, при n четном (и при $\sigma \geqslant n$) из упомянутой суммы выпадают все отрицательные члены. Если $\sigma < n$, то вообще все члены двойной суммы во второй строке формулы (5) исчезают и получается ранее выведенная нами ([1,2]) формула для подсчета суммы $\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{2\sigma}$. Следовательно, ранее выведенной нами формулой нельзя пользо-

ваться при $\sigma \geqslant n$, чего мы в цитированных выше наших статьях не учитывали. Итак, интересно отметить, что, судя по формуле (5), только при $\sigma < n$ величина суммы $\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{2\sigma}$ не зависит от координаты θ точки M.

Доказывается [3], что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \ln r_\nu^2 = \ln \left[r^{2n} + R^{2n} - 2r^n R^n \cos n(\theta - \alpha) \right]. \tag{6}$$

При помощи равенств (5) и (6) величины r_ν исключаются из формулы (3), и эта формула, определяющая понижение давления после включения батареи непрерывно действующих стоков, принимает вид:

$$\Delta p = \frac{Q\mu}{4\pi bk} \left\{ \ln \frac{(4\varkappa t)^n}{r^{2n} + R^{2n} - 2r^n R^n \cos n(\theta - \alpha)} - \right.$$

$$- nC + n \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma-1}}{\sigma (4\varkappa t)^\sigma} \left[\sum_{\lambda=0}^{E\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \frac{(r^2 + R^2)^{\sigma-2\lambda} (rR)^{2\lambda}}{(\lambda!)^2 (\sigma - 2\lambda)!} + \right.$$

$$\left. \left. + 2 \sum_{\eta=1}^{E\left(\frac{\sigma}{n}\right)} \sum_{\lambda=n} \frac{(-1)^\lambda (r^2 + R^2)^{\sigma-\lambda} (rR)^\lambda \cos \eta n (\theta - \alpha)}{\left(\frac{\lambda - \eta n}{2}\right)! \left(\frac{\lambda + \eta n}{2}\right)! (\sigma - \lambda)! A} \right] \right\}. \tag{7}$$

Исключая величины r_ν при помощи равенства (5) из формулы (2), получим следующую формулу для определения понижения пластового давления после включения батареи мгновенных стоков:

$$\Delta p = \frac{\tau \mu n}{4\pi bkt} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(-1)^\sigma}{(4\varkappa t)^\sigma} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{E\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \frac{(r^2 + R^2)^{\sigma-2\lambda} (rR)^{2\lambda}}{(\lambda!)^2 (\sigma - 2\lambda)!} + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{\eta=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{\lambda=n}^{\sigma} \frac{(-1)^\sigma (r^2 + R^2)^{\sigma-\lambda} (rR)^\lambda \cos \eta n (\theta - \alpha)}{\left(\frac{\lambda - \eta n}{2}\right)! \left(\frac{\lambda - \eta n}{2}\right)! (\sigma - \lambda)! A} \right\}. \tag{8}$$

Если требуется определить понижение давления не в произвольной точке $M(r, \theta)$ пласта, а именно на стенке скважины радиуса R_c, причем $R_c \ll R$, то в формулах (7) и (8) следует положить $r \cong R$; кроме того, для точек на стенке каждой из скважин малого радиуса вместо равенства (6) надо пользоваться [3] следующим равенством:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \ln r_\nu^2 = 2 \ln (nR_c R^{n-1}). \tag{9}$$

Соответственно придется изменить [1] знаменатель аргумента логарифма в формуле (7) при подсчете понижения пластового давления на стенке скважины.

Формула (7) уточняет ранее выведенную нами [1] формулу и отличается от нее добавлением всех членов, помещенных в последней строке равенства (7). Однако следует заметить, что ряд, входящий в формулу (7), быстро сходится при достаточно больших значениях

времени t. Во многих практически интересных условиях оказывается вполне достаточным ограничиваться даже одним первым членом ряда. Во всяком случае, если при сравнительно малых значениях времени t, приходится брать несколько членов ряда, т. е. ограничивать суммирование по σ числом $\sigma = s$, но при этом число стоков в батарее $n > s$, то все члены двойной суммы в нижней строке формулы (7) выпадают.

Если в формуле (7) положить $Q = \frac{1}{n} Q_c$, где Q_c — суммарный дебит всех стоков, и перейти к пределу, считая $n \to \infty$, то для понижения давления в окрестности включенного в момент $t = 0$ непрерывно действующего кругового стока (галлереи) получится точно та же формула, которая была выведена в статье [1].

Положим в формуле (8) $n\tau = \tau_c$, где τ_c — суммарная интенсивность всех мгновенных стоков, и перейдем к пределу, считая $n \to \infty$. В таком случае получим следующую известную формулу (но здесь она выведена новым способом) для определения понижения давления в окрестности кругового мгновенного стока:

$$\Delta p = \frac{\tau_c \mu}{4\pi b k t} \left[\exp\left(-\frac{r^2 + l^2}{4\varkappa t} \right) \right] I_0\left(\frac{rk}{2\varkappa t} \right), \tag{10}$$

где I_0 — модифицированная бесселева функция нулевого порядка первого рода.

На основании метода суперпозиции все выведенные выше формулы легко обобщаются на случай включения любого числа концентричных круговых батарей или галлерей мгновенных или непрерывно действующих источников или стоков, причем всегда возможно подсчитать [4] притоки жидкости к каждой галлерее из внутренней или внешней области.

Московский нефтяной институт
им. И. М. Губкина

Поступило
20 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Щелкачев, ДАН, 79, № 4 (1951). [2] В. Н. Щелкачев, Тр. Московск. нефт. инст., в. 13 (1953). [3] В. Н. Щелкачев, Там же, в. 11 (1951). [4] В. Н. Щелкачев, Нефт. хоз., №№ 2, 4 (1952).