Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 1

МАТЕМАТИКА

М. Г. НЕЙГАУЗ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АСИМПТОТИКИ ФУНКЦИИ $q(x)$ ПО СВОЙСТВАМ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА $-y''+q(x)y$

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 I 1955)

1. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка, заданное на полуоси $[0, +\infty)$:

$$y''+(\lambda-q(x))y=0 \tag{1}$$

с граничным условием

$$y(0)=0, \qquad y'(0)=1. \tag{2}$$

Функция $q(x)$ предполагается непрерывной на любом конечном отрезке.

Мы будем называть функцию $q(x)$ потенциальной функцией.

Известно (1), что существует монотонная ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$ такая, что для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом на $[0, +\infty)$ имеет место равенство

$$\int_0^\infty f^2(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda)\,d\rho(\lambda),$$

где $E(\lambda)$ — преобразование Фурье—Планшереля функции $f(x)$, т. е.

$$E(\lambda)=\operatorname*{l.i.m.}_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)\varphi(x,\lambda)\,dx,$$

$\varphi(x,\lambda)$ — решение уравнения (1) с начальными условиями (2).

Функция $\rho(\lambda)$ называется спектральной функцией уравнения (1) при условиях (2).

И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан (2,3) доказали, что если функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяет определенным условиям при $\lambda\to-\infty$ и при $\lambda\to+\infty$, то существует и единственна потенциальная функция $q(x)$ такая, что функция $\rho(\lambda)$ является спектральной функцией (1) с граничным условием (2). Доказано, что и обратно, если функция $q(x)$ имеет непрерывную первую производную, то спектральная функция $\rho(\lambda)$ уравнения (1) удовлетворяет найденным условиям. Единственность определения функции $q(x)$ по $\rho(\lambda)$ была ранее установлена В. А. Марченко (4). М. Г. Крейн (5) нашел условия, которым должна удовлетворять спектральная функция $\rho(\lambda)$, необходимые и достаточные для того, чтобы функция $q(x)$ имела n непрерывных производных ($n\geqslant 0$).

В настоящей работе исследуется вопрос о том, каким условиям

должна удовлетворять спектральная функция $\rho(\lambda)$, чтобы соответствующая ей потенциальная функция $q(x)$ имела определенную асимптотику при $x \to +\infty$. В работе рассмотрены два случая: 1) $q(x) = O\left(\frac{1}{x^n}\right)$ для некоторого целого числа $n \geqslant 1$; 2) $q(x) \equiv 0$ при $x \geqslant X$.

2. Следуя И. М. Гельфанду и Б. М. Левитану, представим спектральную функцию $\rho(\lambda)$ в виде:

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{3\pi}\lambda^{3/2} + \sigma(\lambda) & \text{для } \lambda \geqslant 0; \\ \sigma(\lambda) & \text{для } \lambda < 0. \end{cases} \tag{3}$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только таких функций $\rho(\lambda)$, которые имеют непрерывную первую производную при $\lambda \geqslant 0$.

Положим $\lambda = s^2$ для $\lambda \geqslant 0$ и введем обозначения для производных функций $\rho(s^2)$ и $\sigma(s^2)$ по параметру s:

$$\frac{d}{ds}\rho(s^2) = s^2\alpha(s), \quad \frac{d}{ds}\sigma(s^2) = s^2\beta(s). \tag{4}$$

Из равенства (3) для $\lambda \geqslant 0$ получаем:

$$\alpha(s) = \frac{2}{\pi} + \beta(s).$$

Теорема 1. *Пусть спектральная функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяет условиям:*

1) *Существуют m непрерывных производных функции $\beta(s)$ таких, что*

$$\int_0^\infty |\beta^{(l)}(s)|\,ds < +\infty, \quad l = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$\int_0^\infty s\,|\beta^{(m)}(s)|\,ds < +\infty,$$

$$\beta^{(l)}(0) = 0, \quad l = 1, 3, \ldots, 2r+1 \quad (2r+1 \leqslant m-2)$$

Функция $\beta(s)$ обладает интегрируемым модулем:

$$\int_0^\infty |\beta(s)|\,ds < +\infty,$$

а функция

$$g(z) = \int_0^\infty \cos sz \cdot \beta(s)\,ds$$

имеет непрерывную первую производную.

2) *Имеет место неравенство*

$$\sup_x \int_0^\infty \left| \int_0^\infty \sin sx \cdot \sin sy \cdot \beta(s)\,ds \right| dy < 1.$$

3) *Для* $\lambda < 0$ $\rho(\lambda)$ *кусочно-постоянна и имеет* k *скачков* $(2k \leqslant m-2)$.

Тогда для потенциальной функции $q(x)$ *при* $x \to +\infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$q(x) = O\left(\frac{1}{x^{m-1-2k}}\right).$$

Доказательство этой теоремы проводится при помощи оценок решения линейного интегрального уравнения, выведенного И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном ([2],[3]).

3. Заметим, что введенная нами по формуле (4) функция $\alpha(s) \geqslant 0$, так как $\rho(\lambda)$ — неубывающая функция.

Теорема 2. *Пусть спектральная функция* $\rho(\lambda)$ *удовлетворяет условиям*:

1) *Существует целая функция* $\gamma(s)$ *комплексного переменного* s, *совпадающая для* $s \geqslant 0$ *с функцией* $\frac{1}{\alpha(s)} > 0$, *четная на вещественной оси и такая, что для всех комплексных* s *имеет место неравенство*

$$|\gamma(s)| \leqslant Ce^{A|s|}.$$

2) *Когда параметр* s *вещественен и* $s \to +\infty$,

$$\beta^{(l)}(s) = O\left(\frac{1}{s^3}\right), \quad l = 0, 1, \ldots$$

3) *Для* $\lambda < 0$ $\rho(\lambda) \equiv 0$.

Тогда соответствующая данному $\rho(\lambda)$ *потенциальная функция* $q(x) \equiv 0$ *при* $x \geqslant A/2$.

Наметим доказательство теоремы.

Перепишем уравнение (1) для $\lambda \geqslant 0$ в виде

$$y'' + (s^2 - q(x))\, y = 0. \tag{1'}$$

Рассмотрим функцию (см. ([1]), стр. 58):

$$M(s) = \frac{i}{2s} + \frac{i}{2s}\int_0^\infty e^{ist} q(t)\, y(t, s)\, dt. \tag{5}$$

Известно ([6],[7],[3]), что решение уравнения (1') $y(x, s)$ с граничным условием (2) можно представить в виде:

$$y(x, s) = \frac{\sin sx}{s} + \int_0^x R(x, t)\, \frac{\sin st}{s}\, dt, \tag{6}$$

где непрерывное ядро $K(x, t)$ однозначно определяется по потенциальной функции $q(x)$.

Подставляя (6) в правую часть формулы (5) и преобразуя затем это выражение, находим:

$$4s^2\left(M(s) - \frac{i}{2s}\right) + \int_0^\infty q(t)\, dt = \int_0^\infty e^{2ist}\left(q(t) + \int_t^\infty L(t, z)\, q(z)\, dz\right) dt. \tag{7}$$

Отсюда мы заключаем, что классическое преобразование Фурье левой части равенства (7) есть результат применения оператора типа Вольтерра к потенциальной функции $q(t)$.

Далее мы пользуемся теоремой Палея — Винера ([8]), которая утверждает, что классическое преобразование Фурье целой функции, имеющей первый порядок роста и интегрируемой с квадратом на вещественной оси, обращается в 0 вне конечного интервала.

Доказывается, что левая часть равенства (7) может быть непосредственно определена по спектральной функции $\rho(\lambda)$ и при выполнении условий 1), 2), 3) теоремы 2 удовлетворяет всем условиям теоремы Палея — Винера. Тем самым устанавливается, что

$$q(t) + \int_t^\infty L(t, z)\, q(z)\, dz \equiv 0 \text{ при } t \geqslant \frac{A}{2}. \tag{8}$$

Далее мы исследуем ядро $L(t, z)$ уравнения (8) и доказываем, что уравнение (8) имеет единственное решение.

Отсюда следует, что потенциальная функция

$$q(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant \frac{A}{2},$$

что и требовалось доказать.

Приношу глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР И. М. Гельфанду, под руководством которого была сделана эта работа.

Институт точной механики
и вычислительной техники
Академии наук СССР

Поступило
7 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, 1950. [2] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, ДАН, **77**, № 4 (1951). [3] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., **15**, № 4 (1951). [4] В. А. Марченко, ДАН, **72**, № 3 (1950). [5] М. Г. Крейн, ДАН, **88**, № 3 (1953). [6] Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, **4** (29), в. 1 (1944). [7] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., **23** (63) (1948). [8] R. Paley, N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, 1934.