Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ТИМАН

О ЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ, ФУНКЦИЯХ ЛЕБЕГА И НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К РЯДАМ ФУРЬЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

Пусть $\hat{T}_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$, $\hat{T}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos k \arccos x$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — ортонормированная с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1,1]$ система полиномов П. Л. Чебышева и

$$c_k = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,\hat{T}_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по этой системе.

Всякая треугольная матрица чисел $l_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n+1;\ l_0^{(n)} = 1,\ l_{n+1}^{(n)} = 0)$ определяет некоторый линейный процесс приближения функции $f(x)$ алгебраическими многочленами $U_n(f; x; l)$ вида

$$U_n(f; x; l) = \sum_{k=0}^{n} l_k^{(n)} c_k \hat{T}_k(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

В этой работе изучается вопрос о том, какой должна быть система чисел $l_k^{(n)}$, чтобы

$$U_n(f; x; l) \to f(x) \quad (n \to \infty) \tag{2}$$

при $x \in [-1, 1]$ для всех непрерывных на данном сегменте функций.

Исследование этого вопроса базируется на изучении асимптотического закона поведения соответствующих функций Лебега, т. е. верхней грани

$$M_n(x) = \sup_{|f(x)| \leqslant 1} |U_n(f; x; l)|,$$

распространенной на всевозможные измеримые функции $f(x)$, не превышающие по абсолютной величине единицы, и представляющей собой норму функционала $U_n(f; x; l)$ в пространстве ограниченных на отрезке $[-1,1]$ функций.

Следующая теорема применительно к довольно широкому классу матриц $\{l_k^{(n)}\}$ дает для каждого x асимптотическую оценку снизу функции $M_n(x)$, когда $n \to \infty$.

Теорема 1. *Если строки матрицы $l_k^{(n)}$ имеют равномерно ограниченное изменение, т. е.* $\sum_{k=0}^{n} |\Delta l_k^{(n)}| = O(1)$, *то*

$$M_n(x) \geqslant \frac{4}{\pi^2} |L_n(1) - \{1 - |T_n(|x|)\} L_n(|x|)| + O(1), \tag{3}$$

где

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{n-k}^{(n)}}{k} T_k(x) \tag{4}$$

и $T_k(x)$ *— соответствующий полином П. Л. Чебышева* $\cos k \arccos x$. *Величина* $O(1)$ *в правой части* (3) *равномерно ограничена относительно всех* $x \in [-1, 1]$ *и* $n = 1, 2, \ldots$

Ясно, что при любом фиксированном $x \in [-1, 1]$ правая часть неравенства (3) для рассматриваемых процессов приближения ограничена лишь вместе с $L_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{n-k}^{(n)}}{k}$. Если же $L_n(1) \neq O(1)$, то возникает вопрос о возможности выбрать последовательность точек x_n так, чтобы данная в теореме миноранта для $M_n(x_n)$ оставалась ограниченной. Из неравенства (3) следует, что для ограниченности $M_n(x_n)$ необходимо, чтобы

$$[1 - T_n(|x_n|)] L_n(|x_n|) = L_n(1) + O(1).$$

В частности, если рассматривать лишь матрицы $\{l_k^{(n)}\}$ с неотрицательными элементами, то, как нетрудно заметить, для слабой сходимости в пространстве непрерывных функций $f(x)$ последовательности линейных функционалов $U_n(f; x_n; l)$ необходимо существование такой последовательности нечетных чисел $p = p(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для которой

$$x_n = \cos\left\{\frac{p\pi}{2n} + O\left[\frac{1}{nL_n(1)}\right]\right\}, \tag{5}$$

$$L_n(|x_n|) = L_n(1) + O(1). \tag{6}$$

В частном случае, когда $l_k^{(n)} = 1$ при всех n и $0 \leqslant k \leqslant n$, этот результат был установлен в ([4]), где показана также достаточность условий (5) и (6).

Заметим, что в классе всех рассматриваемых процессов приближения полученное в теореме 1 асимптотическое неравенство улучшить нельзя, так как, например, для указанного частного случая, как это непосредственно следует из теоремы, установленной в ([3])*, $M_n(x)$ асимптотически равно правой части (3). Более того, справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Если* $l_k^{(n)} = O(1)$ *и каждая строка матрицы* $l_k^{(n)}$ *выпукла либо вогнута* $(\Delta^2 l_k^{(n)} = l_k^{(n)} - 2l_{k+1}^{(n)} + l_{k+2}^{(n)} \geqslant 0$ *или* $\Delta^2 l_k^{(n)} \leqslant 0)$, *то при* $n \to \infty$ *для величины* $M_n(x)$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$M_n(x) = \frac{4}{\pi^2} |L_n(1) - \{1 - T_n(|x|)\} L_n(|x|)| + O(1), \tag{7}$$

в котором $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная относительно* x *и* n.

---

* Если учесть, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos ky}{k} = \min\left(\ln \frac{1}{y}, \ln n\right) + O(1) \qquad (0 \leqslant y \leqslant \pi).$$

Укажем некоторые приложения приведенных результатов к тригонометрическим рядам Фурье.

В теории суммирования рядов Фурье известна задача о нахождении эффективных необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять треугольная матрица чисел $\lambda_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n+1$; $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\lambda_{n+1}^{(n)} = 0$) для того, чтобы последовательность тригонометрических полиномов

$$\tilde{U}_n(f; x; l) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье периодической периода 2π функции $f(x)$, равномерно сходилась к $f(x)$ каждый раз, как только эта функция непрерывна. С. М. Никольским [1] было указано такое условие, которое, будучи необходимым, в общем случае не является достаточным. Впоследствии Б. Надь [2] указал некоторые достаточные условия. Что же касается эффективных условий, которые одновременно были бы и необходимы и достаточны, то такие условия пока известны лишь для матриц $\{\lambda_k^{(n)}\}$, каждая строка которых образует выпуклую либо вогнутую систему чисел. Они были найдены С. М. Никольским [1] и заключаются в том, что:

$$1)\ \lambda_k^{(n)} \to 1; \quad 2)\ \lambda_k^{(n)} = O(1); \quad 3)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k} = O(1). \tag{8}$$

Пользуясь теоремой 2, можно получить исчерпывающие эффективные необходимые и достаточные условия для более широкого класса матриц $\{\lambda_k^{(n)}\}$. В самом деле, пусть α_n ($n = 0, 1, 2 \ldots$) — произвольная последовательность чисел. Без ограничения общности можно считать, что $|\alpha_n| \leqslant \pi/2$. Будем рассматривать всевозможные треугольные матрицы $\{\lambda_k^{(n)}\}$ вида

$$\lambda_k^{(n)} = l_k^{(n)} \cos k\alpha_n \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n+1), \tag{9}$$

где значения $l_k^{(n)}$ ($l_0^{(n)} = 1$, $l_{n+1}^{(n)} = 0$) при каждом фиксированном n образуют выпуклую либо вогнутую систему чисел. Выбор последовательности $\alpha_n \equiv 0$, очевидно, будет соответствовать классу матриц, для которых исчерпывающее решение задачи дают условия (8). Приведем предложение, дающее для рассматриваемого класса методов суммирования рядов Фурье асимптотическое поведение соответствующих констант Лебега.

Теорема 3. *Если матрица* $\{\lambda_k^{(n)}\}$ *определена равенствами* (9), *в которых система чисел* $l_k^{(n)}$ ($l_0^{(n)} = 1$, $l_{n+1}^{(n)} = 0$) *при каждом фиксированном* $n = 1, 2, \ldots$ *выпукла либо вогнута,* $\lambda_k^{(n)} = O(1)$, *то, какова бы ни была последовательность* $\{\alpha_n\}$, $|\alpha_n| \leqslant \pi/2$, *при* $n \to \infty$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt \right| dt = \frac{4}{\pi^2} |L_n(1) - (1 - |\cos n\alpha_n|) L_n(\cos \alpha_n)| + O(1), \tag{10}$$

в котором $L_n(\cos \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{n-k}^{(n)}}{k} \cos k\alpha_n$, *а* $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная относительно* n *и всех последовательностей* $\{\alpha_n\}$.

В частности, для случая $\alpha_n \equiv 0$ получаем:

Следствие. Если $\lambda_k^{(n)} = O(1)$ и каждая строка матрицы $\{l_k^{(n)}\}$ выпукла либо вогнута, то

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt\right|dt=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k}+O(1). \tag{11}$$

Теорема 3 позволяет сформулировать следующее утверждение:

Теорема 4. *Если матрица* $\{\lambda_k^{(n)}\}$ *определена равенствами* (9), *в которых система чисел* $l_k^{(n)}$ ($l_0^{(n)} = 1$, $l_{n+1}^{(n)} = 0$) *при каждом фиксированном* $n = 1, 2, \ldots$ *выпукла либо вогнута, и* $|\alpha_n| \leqslant \pi/2$, *то для того, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{U}_n(f; x; \lambda) = f(x)$$

в каждой точке x (*или равномерно относительно* x) *для всех непрерывных периода* 2π *функций, необходимо и достаточно выполнение условий*:

1) $\lambda_k^{(n)} \to 1$ при $n \to \infty$;

2) $\lambda_k^{(n)} = O(1)$;

3) $(1 - |\cos n\alpha_n|) L_n(\cos\alpha_n) = L_n(1) + O(1)$.

Очевидно, что если строки матрицы $\{l_k^{(n)}\}$ составляют систему значений, выпуклую кверху, то условие 3) теоремы 4 можно заменить двумя условиями:

3а) *Существует последовательность нечетных чисел* $p = p(n)$ ($n = 1, 2, \ldots$), *для которой*

$$\alpha_n = \frac{p\pi}{2n} + O\left[\frac{1}{nL_n(1)}\right],$$

3б)

$$L_n(\cos\alpha_n) = L_n(1) + O(1).$$

Для случая, когда $l_k^{(n)} = 1$ при всех n и k ($0 \leqslant k \leqslant n$), $L_n(1) = \ln n + O(1)$, и второе из этих условий равносильно требованию $p = p(n) = O(1)$.

Для получения приведенных результатов использовались методы исследования, применявшиеся ранее в работах ([3–6]), и некоторые новые асимптотические оценки ([7]).

Днепропетровский
государственный университет

Поступило
28 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., **12**, 259, 278 (1948). [2] B. Nagy, Acta Sci. Math. Szeged, **12**, 204 (1950). [3] А. Ф. Тиман, ДАН, **61**, № 6, 989 (1948). [4] А. Ф. Тиман, Изв. АН СССР, сер. матем., **14**, № 1, 85 (1950). [5] А. Ф. Тиман, ДАН, **77**, № 6, 969 (1951). [6] А. Ф. Тиман, Изв. АН СССР, сер. матем., **17**, № 2, 99 (1953). [7] Л. М. Абрамов, ДАН, **98**, № 2 (1954).