Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 1

МАТЕМАТИКА

А. Б. НАЙШУЛЬ

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 XII 1954)

Назовем линейным функциональным условием (1) для вектор-функции $r(x)$ соотношение вида

$$Q_0 r(a) + \int_a^b dG(x) r(x) = \varphi, \tag{1}$$

где Q и $G(x)$ — квадратные матрицы n-го порядка, причем $G(x)$ — матрица с элементами из функций ограниченной вариации, удовлетворяющая условию $G(b) = 0$.

Пусть $A(x)$ — квадратная матрица n-го порядка, $f(x)$ — n-мерный вектор, компоненты которого — непрерывные функции на сегменте ab.

Нахождение решения дифференциального уравнения

$$\frac{dr(x)}{dx} = A(x) r(x) + b(x), \tag{2}$$

удовлетворяющего линейному функциональному условию (1), назовем линейной функциональной задачей.

Пусть $R(x)$ — матрица фундаментальных решений уравнения (2), удовлетворяющая условию $R(a) = E$, где E — единичная матрица, а $\rho(x)$ — частное решение неоднородного уравнения (2), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Тогда общее решение уравнения (2) запишется в виде

$$r(x) = R(x) r(a) + \rho(x). \tag{3}$$

Подставив $r(x)$ из формулы (3) в условие (1), получим уравнение для определения неизвестного начального условия

$$\left(Q + \int_a^b dG(x) R(x) \right) r(a) = \varphi - \int_a^b dG(x) \rho(x), \tag{4}$$

$$\cdot Ur(a) = \psi, \tag{4'}$$

где

$$U = Q + \int_a^b dG(x) R(x), \quad \psi = \varphi - \int_a^b dG(x) \rho(x).$$

Решение линейной функциональной задачи будет существовать, если уравнение (4) имеет решение.

Теорема 1. *Линейное дифференциальное уравнение* (2) *при линейном функциональном условии* (1) *имеет единственное решение,*

если ранг матрицы U равен n; не имеет решения, если ранг матрицы U меньше ранга расширенной матрицы $U\varphi$, и имеет $(n-k)$-параметрическое семейство решений, если ранг U равен рангу $U\varphi$ и равен k.

Следствие. Линейная функциональная задача не может иметь конечного ($k \neq 1$) или счетного числа решений.

Геометрически уравнение (4) можно интерпретировать как n гиперплоскостей в n-мерном пространстве начальных данных. Единственное решение существует, если все гиперплоскости пересекаются в одной точке. Решение отсутствует, если нет точки, принадлежащей одновременно всем гиперплоскостям. Существует ρ-параметрическое семейство решений, если имеется ρ-мерная ($\rho \leqslant n$) гиперплоскость, принадлежащая всем гиперплоскостям.

Проинтегрируем функциональное условие (1) по частям и подставим dr/dx из уравнения (2). Мы получаем новое функциональное условие

$$(Q - G(a))\, r(a) - \int_a^b G(x)\, A(x)\, r(x)\, dx = \varphi + \int_a^b G(x)\, b(x)\, dx, \qquad (5)$$

которое назовем итерированным.

Введем обозначения:

$$G_{k+1}(x) = -\int_x^b G_k(\tau)\, A(\tau)\, d\tau, \qquad (6)$$

$$Q_0 - \sum_{k=0}^{p-1} G_k(a) = Q_p, \qquad (7)$$

$$\varphi_0 + \int_a^b \sum_{k=0}^{p-1} G_k(x)\, b(x)\, dx = \varphi_p. \qquad (8)$$

Тогда p раз итерированное функциональное условие запишется в виде

$$Q_p r(a) + \int_a^b dG_p(x)\, r(x) = \varphi_p. \qquad (9)$$

Для итерированных функциональных условий также будет иметь место теорема 1. Каждому условию ($p = 1, 2, \ldots$) будет соответствовать своя система гиперплоскостей в n-мерном простанстве начальных данных, однако пересечение этих гиперплоскостей будет одно и то же.

Интересным свойством итерированных функциональных условий является превращение их в конечные соотношения при $p \to \infty$. Примем за норму вектора его модуль, тогда норма матрицы Q определится как $\max \| Q\rho \|$ при условии $\| \rho \| = 1$.

Теорема 2. *Последовательность итерированных функциональных условий* (9), *определенных на конечном сегменте ab, при $p \to \infty$ сходится по норме к линейному уравнению*

$$Q_\infty r(a) = \varphi_\infty. \qquad (10)$$

Решение уравнения (2) *при начальном условии, определенном из уравнения* (10), *удовлетворяет функциональному условию* (1).

Во многих случаях мы можем, не решая функциональной задачи, установить существование, единственность и область нахождения решения.

Теорема 3. *Существует единственное решение функциональной задачи с областью расположения решения*

$$\| r(a) \| \leqslant \frac{\| Q_p^{-1}\varphi_p \|}{1-q}, \tag{11}$$

если

1) *существует на сегменте ab производная* $\frac{dG_p(x)}{dx}$;

2) *удовлетворяется неравенство*

$$q = \int_a^b \left\| Q_p^{-1} \frac{dG_p(x)}{dx} \right\| \exp\left(\int_a^x \lambda(\xi)\, d\xi \right) dx < 1, \tag{12}$$

где $\lambda(\xi)$ — *максимум квадратичной формы* $(A(\xi)\cdot\alpha(\xi), \alpha(\xi))$ *при условии* $\| \alpha(\xi) \| = 1$.

В теореме 3 доказывается существование и единственность решения функциональной задачи, в некотором смысле близкой к задаче Коши. Пользуясь методом, изложенным в настоящей заметке, можно доказать существование и единственность решения некоторых функциональных задач, не близких к задаче Коши.

Теорема 4. *Система линейных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j(x) + b_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

при одном функциональном условии

$$\sum_{\rho=1}^{n} y_\rho(a)\, Q_{1\rho} + \sum_{\rho=1}^{n} \int_a^b y_\rho(x)\, dg_{1\rho}(x) = \varphi_1 \tag{14}$$

и начальных условиях

$$y_i(a) = y_i^0, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \tag{15}$$

имеет единственное решение, если:

1) *существует такой конечный промежуток* $\underline{x}\overline{x} \subset ab$, *на котором выполняется неравенство*

$$|Q_{11}| + \sum_{\rho=1}^{n} \left| \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} y_{\rho 1}(x)\, dg_{1\rho}(x) \right| > 0; \tag{16}$$

2) *функции* $a_{ij}(x)$ *не меняют знака, а функции* $g_{i\rho}(x)$ *монотонны на сегменте ab*;

3) *знаки* $Q_{11}(a)$ *и функций* $a_{ij}(x)$ *на сегменте ab определяются соотношениями* *

$$\operatorname{sign} Q_{11} = \operatorname{sign} dg_{11}(x), \tag{17}$$

$$\operatorname{sign} a_{\rho j}(x) = \operatorname{sign} dg_{1\rho}(x) \cdot \operatorname{sign} dg_{1j}(x). \tag{18}$$

Поступило
27 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] З. Ф. Сурикова, ДАН, 1, № 4 (1936). [2] M. Picone, Atti Acad. Lincei, (6) 15 (1932). [3] Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 1950.

* Если в функциональном условии члены $dg_{1\rho_1}, dg_{1\rho_2}, \ldots, dg_{1\rho_k}$ тождественно равны нулю на сегменте ab, то в соотношениях (17), (18) будем приписывать им или положительные или отрицательные знаки.