Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 2

МАТЕМАТИКА

М. А. РУТМАН

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ИМЕЮЩИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

Как известно, одна из основных задач теории устойчивости по Ляпунову состоит в выяснении условий, при которых системы дифференциальных уравнений (линейных или „близких" к линейным), с аргументом, изменяющимся на полуоси, имеют ограниченные решения при всяких ограниченных правых частях (см., например, [1]).

В настоящей заметке мы решаем подобную задачу для некоторых операторных уравнений в линейном полуупорядоченном пространстве. Ограниченность для элементов этого пространства мы понимаем как сравнимость их с определенным фиксированным „масштабным" элементом [3].

Пусть E — вещественное полуупорядоченное пространство со следующей аксиоматикой:

1. E — линейное пространство с умножением элементов на вещественные скаляры.

2. Для некоторых элементов из E введено соотношение $x \succ 0$. При этом: если $x, y \succ 0$; λ, μ — неотрицательные скаляры, то $\lambda x + \mu y \succ 0$; если $x \succ 0$; $-x \succ 0$, то $x = 0$; для каждого $x \in E$ найдется элемент $X \succ 0$ такой, что $X - x \succ 0$.

Совокупность P всех элементов x из E, для которых $x \succ 0$, назовем конусом пространства E. Будем писать $x \succ y$ или $y \prec x$, если $x - y \succ 0$ ([2], стр. 16).

3. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ элементов из E назовем последовательностью Коши, если существует $y_0 \in P$ („регулятор сходимости"), обладающий тем свойством, что каждому $\varepsilon > 0$ отвечает натуральное $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $m, n \geqslant N$ $-\varepsilon y_0 \prec x_m - x_n \prec \varepsilon y_0$. Требуем, чтобы пространство E было замкнуто, т. е. чтобы всякая последовательность Коши имела предел. При этом сходимость $x_n \to x_0$ означает существование „регулятора" $z_0 \in P$ такого, что $-\varepsilon z_0 \prec x_0 - x_n \prec \varepsilon z_0$, если только $n \geqslant N = N(\varepsilon)$.

Линейность E и наличие понятия сходимости позволяют обычным путем ввести понятие линейного (т. е. аддитивного и однородного) и непрерывного функционала и оператора.

4. Существует система линейных функционалов $\{f_\alpha(x)\}$ такая, что $x \succ 0$ тогда и только тогда, когда при всех α $f_\alpha(x) \geqslant 0$ (заметим, что линейный функционал, неотрицательный на P, всегда непрерывен).

Завершим аксиоматику пространства E, построим его комплексное расширение $\tilde{E}$. Элементами $\tilde{E}$ будем считать объекты вида $x = x_1 + ix_2$ $(x_1, x_2 \in E)$ с обычными правилами сложения и умножения на комплексные скаляры. При этом соотношение $-y \prec x = x_1 + ix_2 \prec y$ $(x_1, x_2 \in E; y \in P)$ будем понимать в том смысле, что при всех φ $x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi \prec y$.

Пример. В применениях важную роль будет играть пространство E_Q всех функций вида $x(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, заданных и непрерывных на множестве Q точек n-мерного пространства с областью значений, принадлежащей вещественному банахову пространству $\mathscr{E}$. Построим в $\mathscr{E}$ конус из элементов вида $y = \lambda(\xi + x)$, где λ — произвольный неотрицательный скаляр, ξ — фиксированный элемент, $\|\xi\| = 1$, а x — произвольный элемент $\mathscr{E}$, норма которого не превышает фиксированного q; $0 < q < 1$.

Полагаем $x = x(t_1, t_2, \ldots, t_n) \succ 0$, если все значения $x(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ принадлежат конусу. Комплексное расширение $\tilde{E}_Q$ есть множество функций, заданных и непрерывных на Q, с областью значений, принадлежащей $\tilde{\mathscr{E}}$.

Легко показать, что сходимость „с регулятором" означает равномерную сходимость по норме $\mathscr{E}$ на каждой ограниченной замкнутой части Q ([3]).

Переходя к рассмотрению линейных операторов, действующих в $\tilde{E}$, приведем следующие определения.

Линейный непрерывный оператор S назовем вольтерровым, если ряд $x + \lambda Sx + \lambda^2 S^2 x + \ldots + \lambda^n S^n x + \ldots$ сходится при всяком $x \in \tilde{E}$ и при всех комплексных λ (сумма его, очевидно, дает $(I - \lambda S)^{-1}$).

Линейный оператор S назовем монотонным, если из $x \succ x$ $(x, y \in E)$ всегда следует $Sx \succ Sy$. Такой оператор, легко видеть, всегда непрерывен.

Если операторы $S_1 \pm S_2$ являются монотонными, то оператор S_1 будем называть мажорантой для S_2.

Наконец, линейный оператор A назовем ограниченным, если существует скаляр $c > 0$ такого рода, что из $-y \prec x \prec y$ $(x \in \tilde{E}, y \in P)$ всегда следует $-cy \prec Ax \prec cy$.

Для ограниченного оператора A введем понятие регулярной точки: λ_0 регулярна, если оператор $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ существует (во всем $\tilde{E}$) и ограничен. Спектр A определяем как дополнение к множеству регулярных точек.

В дальнейшем буквами S или, соответственно, A с различными индексами мы будем обозначать линейные операторы, имеющие монотонные вольтерровы мажоранты или, соответственно, ограниченные в $\tilde{E}$ (в частности, сами операторы S могут быть вольтерровы и монотонны). Будем далее считать, что операторы S перестановочны между собой и с каждым из операторов A.

Можно доказать следующее.

1. Линейное операторное уравнение:

$$y - SAy = x \tag{1}$$

имеет одно и только одно решение, которое представляется формулой

$$y = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (I - \lambda S)^{-1} (A - \lambda I)^{-1} x \, d\lambda. \tag{2}$$

Здесь γ — произвольный спрямляемый контур, внутри которого расположен весь спектр оператора A.

2. Решение операторного уравнения:

$$y - S_1 S_2 \ldots S_n A y = x \tag{3}$$

(по предыдущему оно существует и единственно) представляется формулой

$$y = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \oint_{\gamma_1} \dots \oint_{\gamma_n} (I - \lambda_1 S_1)^{-1} \dots (I - \lambda_n S_n)^{-1} (A - \lambda_1 \dots \lambda_n I)^{-1} x \, d\lambda_1 \dots d\lambda_n. \tag{4}$$

Здесь $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ — произвольные контуры, охватывающие точку O, а контур γ_n должен охватывать спектр семейства операторов $A / \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$ ($\lambda_k \in \gamma_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$).

3. Операторное уравнение

$$y - S_1 A_1 y - S_2 A_2 y - \dots - S_n A_n y = x \tag{5}$$

имеет одно и только одно решение, которое задается формулой

$$y = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (I - \lambda S_n)^{-1} \left[I - S_1 \left(I - \frac{A_n}{\lambda} \right)^{-1} A_1 - S_2 \left(I - \frac{A_n}{\gamma} \right)^{-1} A_2 - \dots \right.$$

$$\left. \dots - S_{n-1} \left(I - \frac{A_n}{\lambda} \right)^{-1} A_{n-1} \right]^{-1} (A_n - \lambda I)^{-1} x \, d\lambda. \tag{6}$$

Здесь контур γ охватывает спектр A_n. Эту формулу можно рассматривать как рекуррентную потому, что она выражает оператор $(I - S_1 A_1 - S_2 A_2 - \dots - S_n A_n)^{-1}$ через оператор того же вида, но при меньшем числе слагаемых.

4. Если дополнительно потребовать, чтобы в уравнении (5) операторы $A_1, A_2, \dots, A_n$ были попарно перестановочны, то формула (6) может быть окончательно приведена к виду

$$y = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \cdots \oint_{\gamma_n} (I - \lambda_1 S_1 - \lambda_2 S_2 - \dots - \lambda_n S_n)^{-1} \times$$

$$\times (A_1 - \lambda_1 I)^{-1} (A_2 - \lambda_2 I)^{-1} \dots (A_n - \lambda_n I)^{-1} x \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \dots d\lambda_n, \tag{7}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — спрямляемые контуры, охватывающие, соответственно, спектры $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Пусть ξ_0 — некоторый фиксированный элемент из P. Элемент $x \in \tilde{E}$ будем называть ограниченным (по отношению к „масштабному“ элементу ξ_0), если существует скаляр $t = t(x)$, при котором $-t\xi_0 \prec x \prec t\xi_0$. Нижнюю грань чисел t, при которых выполняется это соотношение, назовем нормой x ($\| x \|$).

Множество $\tilde{E}_0$ всех ограниченных элементов из $\tilde{E}$ можно рассматривать как банахово пространство, полное относительно сходимости с регулятором ξ_0 [3].

Из формул (2), (4), (6) и (7) можно получить следующие предложения.

Теорема 1. *Если существует спрямляемый контур γ, не проходящий через O, охватывающий все точки спектра оператора A и такой, что при всяком $\zeta \in \gamma$ уравнение $y - \zeta S y = x$ имеет ограниченное решение для каждого ограниченного x, то операторное уравнение*

$$y - SAy = x_0 + Sx_1 \tag{8}$$

тоже имеет ограниченное решение при всяких ограниченных x_0 и x_1.

Теорема 2. *Для того чтобы операторное уравнение*

$$y - S_1 S_2 \dots S_n A y = x_0 + \Sigma S_{k_1} S_{k_2} \dots S_{k_m} x_{k_1 k_2 \dots k_m}, \tag{9}$$

где $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ *— подсистемы из ряда* $\{1, 2, \dots, n\}$, *имело ограниченное решение при всяких ограниченных* $\{x_0, x_{k_1 k_2, \dots, k_m}\}$, *достаточно, чтобы существовали спрямляемые контуры* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, *обладающие следующими свойствами:*

1°. *Контуры* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ *охватывают точку O, контур* γ_n *охватывает спектр семейства операторов* $A / \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_{n-1}$, *где* ζ_j *произвольно изменяются на* γ_j $(j = 1, 2, \dots, n-1)$.

2°. *Каждое из уравнений* $y - \zeta_j S_j y = x$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ *имеет ограниченное решение при всяком ограниченном x и при всяком* ζ_j *из* γ_j.

Теорема 3. *Пусть в операторном уравнении*

$$y - S_1 A_1 y - \Sigma S_{k_1} S_{k_2} \dots S_{k_p} A_{k_1 k_2 \dots k_p} y = x_0 + \Sigma S_{j_1} S_{j_2} \dots S_{j_q} x_{j_1 j_2 \dots j_q} \tag{10}$$

$\{k_1, k_2, \dots, k_p\}$ *— подсистемы индексов из ряда* $\{1, 2, \dots, n\}$, *ни одна из которых не состоит из единственного индекса* 1; $\{j_1, j_2, \dots, j_q\}$ *также подсистемы из ряда* $\{1, 2, \dots, n\}$, *причем нет такого индекса среди* $j_1, j_2, \dots, j_q$, *который не встречался бы среди индексов* $1, k_1, k_2, \dots, k_p$, *входящих в левую часть.*

Для того чтобы это уравнение имело ограниченное решение при всяких ограниченных $\{x_0, x_{j_1 j_2 \dots j_q}\}$, *достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1° *Каждое из уравнений* $y - \zeta S_j y = x$ $(j = 2, 3, \dots, n)$ *имеет ограниченное решение при всяком ограниченном x и при произвольном* ζ.

2°. *Существует спрямляемый контур* γ, *не проходящий через O и охватывающий спектр оператора* A_1, *в каждой точке которого уравнение* $y - \zeta S_1 y = x$, $(\zeta \in \gamma)$ *имеет ограниченное решение для любого ограниченного x.*

Теорема 4. *Пусть в операторном уравнении*

$$y - S_1 A_1 y - S_2 A_2 y - \dots - S_n A_n y = x_0 + S_1 x_1 + S_2 x_2 + \dots + S_n x_n, \tag{11}$$

кроме общих условий, принятых выше, имеет место попарная перестановочность операторов $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Для того чтобы при всяких ограниченных $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ *это уравнение имело ограниченное решение, достаточно, чтобы существовала система спрямляемых контуров* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ *такая, что:*

1°. *Контур* γ_j *охватывает спектр оператора* A_j $(j = 1, 2, \dots, n)$.

2°. *Для всякой системы точек* $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, *взятых, соответственно, на* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, *и при любых ограниченных* $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ *уравнение* $y - \zeta_1 S_1 y - \zeta_2 S_2 y - \dots - \zeta_n S_n y = x_0 + S_1 x_1 + S_2 x_2 + \dots + S_n x_n$ *имеет ограниченное решение.*

Одесский
гидрометеорологический институт

Поступило
5 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Perron, Math. Zs., 32, H. 5, 703 (1930). [2] М. Крейн, М. Рутман, Успматем. наук, 3, в. 1 (23) (1948). [3] Н. Ахиезер, М. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, 1938, стр. 158.