Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 2

МАТЕМАТИКА

И. С. ИОХВИДОВ

К ТЕОРИИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ ФОРМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

Настоящее сообщение примыкает к нашей заметке (1), терминологии и обозначений которой мы здесь придерживаемся.

1. Спектральный анализ унитарных операторов в пространствах H_k с индефинитной метрикой (k — натуральное число), произведенный нами в (1), дает возможность получить своеобразные интегральные представления для квадратичных форм:

$$(U^p x, x) \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; x \in H_k)$$

(U — унитарный оператор в H_k), являющиеся аналогами и обобщениями спектрального разложения степеней обычного унитарного оператора в гильбертовом пространстве.

В отличие от (1), нам здесь удобнее полагать, что в пространстве H_k скалярный квадрат вектора x выражается формой

$$(x, x) = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \ldots + |\xi_k|^2 - |\xi_{k+1}|^2 - |\xi_{k+2}|^2 - \ldots$$

с k положительными, а остальными отрицательными квадратами, что не меняет сути дела.

Как показано в (1), из основной теоремы Л. С. Понтрягина — М. Г. Крейна (2-4) о существовании инвариантного k-мерного подпространства для U вытекает, что оператор

$$S = (U - \lambda_1 I)(U - \lambda_2 I)\ldots(U - \lambda_k I) \quad (|\lambda_j| \geqslant 1;\ j = 1, 2, \ldots, k),$$

аннулирующий k-мерное инвариантное подпространство J оператора U, обладает тем свойством, что для любого $x \in H_k$ имеем $Sx \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — совокупность всех векторов из H_k, ортогональных к J. Аналогично, оператор $S^* = (U^{-1} - \bar{\lambda}_1 I)(U^{-1} - \bar{\lambda}_2 I)\ldots(U^{-1} - \bar{\lambda}_k I)$, сопряженный с S в метрике H_k, аннулирует все инвариантное подпространство J' и $S^* x \in \mathfrak{M}'$ ($x \in H_k$), где $\mathfrak{M}'$ — совокупность всех $x \in H_k$, ортогональных к J'. Так как на подпространствах J и J' форма (x, x) неотрицательна, то на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ она неположительна, откуда для всех $x \in H_k$ имеем $(Sx, Sx) \leqslant 0$; $(S^* x, S^* x) \leqslant 0$.

Поэтому для эрмитова оператора $A = -S^* S = -SS^*$ всегда

$$(Ax, x) \geqslant 0 \quad (x \in H_k). \tag{1}$$

Введем следующие обозначения: для любой последовательности $\{a_p\}$ ($p = 0, 1, 2, \ldots$) символом Δ^2 обозначим конечную разность второго порядка, т. е.

$$\Delta^2 a_p = a_{p+1} - 2a_p + a_{p-1} \quad (a_{-p} = \bar{a}_p;\ p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пусть, далее, рассмотренные выше собственные числа $\lambda_j = \exp(\zeta_j + i\varphi_j)$, где $\zeta_j \geqslant 0$; $-\pi \leqslant \varphi_j < \pi$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Рассмотрим конечноразностные операции

$$L_j = \Delta^2 - 4\,\mathrm{sh}^2\frac{\zeta}{2} \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

и применим их к выражениям $e^{-pi\varphi_j} U^p$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, соответственно. Получим для $j = 1, 2, \ldots, k$:

$$L_j(e^{pi\varphi_j} U^p) = e^{-pi\varphi_j} U^p (e^{-i\varphi_j} U - 2\,\mathrm{ch}\,\zeta_j I + e^{i\varphi_j} U^{-1}) =$$
$$= -e^{-pi\varphi_j} e^{-\zeta_j} U^p (I - e^{\zeta_j - i\varphi_j} U - e^{\zeta_j + i\varphi_j} U^{-1} + e^{2\zeta_j} I) =$$
$$= -e^{-pi\varphi_j} e^{-\zeta_j} U^p (U - \lambda_j I)(U^{-1} - \bar{\lambda}_j I).$$

Построим теперь конечноразностный оператор L порядка $2k$:

$$L(a_p) = (-1)^{k+1} e^{pi\varphi_k} L_k [e^{-pi(\varphi_k - \varphi_{k-1})} L_{k-1} [e^{-pi(\varphi_{k-1} - \varphi_{k-2})} L_{k-2} \ldots$$
$$\ldots [e^{-pi(\varphi_2 - \varphi_1)} L_1 (a_p e^{-pi\varphi_1})] \ldots]].$$

Легко видеть, что

$$L(U^p) = e^{-(\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_k)} U^p A \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Таким образом, если $c_p = (U^p x, x)$ $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, где x — фиксированный вектор из H_k, то для $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$L(c_p) = (L[U^p] x, x) = e^{-(\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_k)} (U^p Ax, x) = e^{-(\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_k)} (AU^p x, x). \tag{2}$$

Если в H_k ввести новое скалярное произведение

$$[x, y] = (Ax, y) \quad (x, y \in H_k)$$

и отождествить между собой все те векторы x и y, для которых $[x - y, x - y] = 0$, то, в силу (1), H_k превратится в обычное гильбертово пространство, а в силу перестановочности $AU = UA$ оператор U, обладающий свойством

$$[Ux, Uy] = (AUx, Uy) = (UAx, Uy) = (Ax, y)\,[x, y],$$

является обычным унитарным оператором в этом гильбертовом пространстве. Пусть E_t $(-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$ есть его разложение единицы, тогда

$$[U^p x, x] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{pit}\, d\,[E_t x, x] \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

С другой стороны, из (2)

$$L(c_p) = e^{-(\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_k)} [U^p x, x] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{pit}\, d\,[F_t x, x] \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где $F_t = e^{-(\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_k)} E_t$ $(-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$.

Теперь для отыскания представлений самих величин $c_p = (U^p x, x)$ $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ достаточно решить конечноразностное уравнение

$$L(c_p) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{pit}\, d\sigma(t) \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3}$$

где $\sigma(t) = \sigma(t; x) = [F_t x, x]$ есть неубывающая функция в интервале $[-\pi, \pi]$, нормированная так, что $\sigma(t - 0) = \sigma(t)$.

2. Прежде чем решить уравнение (3), укажем одно непосредственное приложение полученного выше результата.

Бесконечную последовательность $c_0 \gtreqless 0, c_1, c_2, \ldots$ мы будем называть обладающей свойством $\mathfrak{P}_k$, если для достаточно больших натуральных n $(n > N \geqslant k-1)$ теплицева форма

$$\sum_{p,q=0}^{n} c_{p-q}\xi_p\bar{\xi}_q \quad (c_{-p}=\bar{c}_p;\ p=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

содержит точно k положительных квадратов.

Если последовательность $c_0 \gtreqless 0, c_1, c_2, \ldots$ обладает свойством $\mathfrak{P}_k$, то весьма элементарными рассуждениями удается построить координатное пространство H_k и унитарный оператор U в H_k такие, что

$$c_p = (U^p e_0, e_0) \quad (p=0,\pm 1,\pm 2,\ldots),$$

где e_0 — некоторый специальный вектор из H_k.

В сочетании с результатом пункта 1 это позволяет сформулировать следующую теорему:

Теорема (4). *Если бесконечная последовательность* $c_0 \gtreqless 0, c_1, c_2, \ldots$ *обладает свойством* $\mathfrak{P}_k$, *то существует линейный конечноразностный оператор* L *порядка* $2k$, *содержащий разности только четных порядков и такой, что последовательность*

$$L(c_p) = \sum_{j=-k}^{k} \alpha_j c_{p+j} \quad (p=0,1,2,\ldots;\ \alpha_{-j}=\bar{\alpha}_j;\ j=0,1,2,\ldots,k)$$

является уже неотрицательной, т. е. все эрмитовы формы $\sum_{p,q=0}^{n} L(c_{p-q})\xi_p\bar{\xi}_q$ $(n=0,1,2,\ldots)$ *неотрицательны.*

3. Решение линейного неоднородного конечноразностного уравнения (3) существенно изменяет свой вид в зависимости от равенства или неравенства нулю чисел $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$.

Рассмотрим возможные здесь крайние случаи.

I. Пусть $\zeta_1 = \zeta_2 = \ldots = \zeta_k = 0$. Тогда $\lambda_j \exp(i\varphi_j)$ $(j=1,2,\ldots,r)$, причем λ_j пусть имеет кратность s_j, так что $s_1 + s_2 + \ldots + s_r = k$.

В этом случае решение уравнения (3) записывается в виде

$$c_p = \sum_{j=1}^{r} e^{pi\varphi_j}\left[a_0^{(j)} + a_1^{(j)} p + \ldots + a_{2s_j-1}^{(j)} p^{2s_j-1}\right] -$$

$$-4^{-k}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{j=1}^{r}\left(\sin\frac{t-\varphi_j}{2}\right)^{-2s_j}\left[e^{pit} - S_p(t)\right]d\sigma(t), \tag{4}$$

где $p=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$; $a_\nu^{(j)}(\nu=0,1,2,\ldots,2s_j-1;\ j=1,2,\ldots,r)$ — некоторые постоянные, а $S_p(t)$ — любая функция, обладающая теми свойствами, что $S_{-p}(t)=\overline{S_p(t)}$, $L[S_p(t)]=0$ $(p=0,\pm 1,\pm 2,\ldots;\ -\pi \leqslant t \leqslant \pi)$ и такая, что функция $e^{pit} - S_p(t)$ имеет в каждой из точек $t=\varphi_j$ нуль кратности s_j, соответственно $(j=1,2,\ldots,r)$. Несложную конструкцию $S_p(t)$ мы опускаем ради экономии места.

II. $0 < \zeta_1 \leqslant \zeta_2 \leqslant \ldots \leqslant \zeta_k$. Собственные числа $\lambda_j = \exp(\zeta_j + i\varphi_j)$ пусть имеют кратности s_j $(j=1,2,\ldots,r)$, соответственно $(s_1 + \ldots + s_r = k)$. Тогда решение уравнения 3 имеет вид

$$c_p = \sum_{j=1}^{r} e^{pi\varphi_j}\left[\left(a_0^{(j)} + a_1^{(j)} p + \ldots + a_{s_j-1}^{(j)} p^{s_j-1}\right)e^{p\zeta_j} + \right.$$

$$\left. + \left(b_0^{(j)} + b_1^{(j)} p + \ldots + b_{s_j-1}^{(j)} p^{s_j-1}\right)e^{-p\zeta_j}\right] - \int_{-\pi}^{\pi} e^{pit}\,d\omega(t), \tag{5}$$

где $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $a_\nu^{(j)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, s_j - 1; \quad j = 1, 2, \ldots, r)$ — некоторые постоянные, а

$$\omega(t) = 4^{-k} \int_{-\pi}^{t} \prod_{j=1}^{r} \left(\operatorname{sh}^2 \frac{\zeta_j}{2} + \sin^2 \frac{\tau - \varphi_j}{2} \right)^{-s_j} d\sigma(\tau) \quad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi).$$

Случай I мы назовем параболическим, а случай II — гиперболическим. В общем (смешанном) случае соответствующие формулы получаются простым сочетанием формул (4) и (5). Ввиду громоздкости их записи, мы их опускаем.

4. Для геометрических приложений особый интерес представляет случай, когда $k = 1$. Здесь формулы (4) и (5) значительно упрощаются и для последовательности $c_0 \gtreqless 0$, $c_1, c_2, \ldots$, обладающей свойством $\mathfrak{P}_1$, мы получаем альтернативу: либо

$$c_p = e^{pi\varphi} \left[a + bip + dp^2 - \int_{-\pi}^{\pi} (e^{pit} - 1 - ipt) \sin^{-2} \frac{t}{2} \, d\sigma(t) \right] \tag{6}$$

$$(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где $-\pi \leqslant \varphi < \pi$, $\Im a = \Im b = 0$, $d \geqslant 0$, $\sigma(t)$ — неубывающая функция, непрерывная при $t = 0$; либо

$$c_p = e^{pi\varphi} \left[\rho \operatorname{ch}(p\zeta + i\alpha) - \int_{-\pi}^{\pi} e^{pit} \, d\tau(t) \right] \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{7}$$

где $-\pi \leqslant \alpha, \varphi < \pi$, $\rho > 0$, $\zeta > 0$, а $\tau(t)$ — неубывающая функция.

Для вещественной последовательности $c_0, c_1, c_2, \ldots$ имеем, соответственно:

$$c_p = a + dp^2 + \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{pt}{2} \sin^{-2} \frac{t}{2} \, d\sigma(t) \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \tag{6'}$$

$$c_p = \rho \operatorname{ch} p\zeta - \int_0^{\pi} \cos pt \, d\tau(t) \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{7'}$$

Если потребовать дополнительно, чтобы $c_0 > 0$, то формулы (6) и (7) (соответственно (6′) и (7′)) являются и достаточными для того, чтобы $\{c_p\}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ обладала свойством $\mathfrak{P}_1$.

В заключение отметим, что представления (6), (6′) и (7), (7′) были ранее получены М. Г. Крейном иными методами (предельными переходами при $n \to \infty$ от конечных последовательностей $c_0, c_1, \ldots, c_n$). Им же доказано, что эти представления определяются в случае бесконечной последовательности $c_0, c_1, c_2, \ldots$ единственным образом. Этим же методом, любезно сообщенным М. Г. Крейном автору, удалось получить другое доказательство теоремы пункта 2, уступающее приведенному в тексте в простоте, но более элементарное.

Важность формул (6′) и (7′) заключается еще и в том, что, пользуясь ими, можно совершить предельный переход от дискретной последовательности, обладающей свойством $\mathfrak{P}_1$, к ее континуальному аналогу — функции особого типа. Этот переход позволил М. Г. Крейну [5] получить интегральные представления функций, играющих важную роль в теории винтовых линий в пространстве Лобачевского конечного и бесконечного числа измерений.

Одесский гидротехнический институт

Поступило
4 VIII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Иохвидов, ДАН, 71, № 2, (1950). [2] Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, № 6, 243 (1944). [3] М. Г. Крейн, Усп. матем. наук, 5, в. 2. (36) (1950). [4] И. С. Иохвидов, Унитарные и самосопряженные операторы в пространстве с индефинитной метрикой, диссертация, Одесса, 1950. [5] М. Г. Крейн, Усп. матем. наук, 3, в. 3 (1948).