Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 2

МАТЕМАТИКА

Р. Э. ВИНОГРАД

ЗАМЕЧАНИЕ О КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

Пусть дана система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{1}$$

для которой начало координат O служит изолированной особой точкой, т. е. существует такое R, что

$$P^2(x, y) + Q^2(x, y) > 0 \text{ при } 0 < x^2 + y^2 < R^2; \quad P(0, 0) = Q(0, 0) = 0. \tag{2}$$

Функции P и Q предположим дважды непрерывно дифференцируемыми.

Обычный метод исследования особой точки O (т. е. тривиального решения $x = y = 0$) на устойчивость по Ляпунову состоит в том, что рассматривают при $x = y = 0$ уравнение

$$\begin{vmatrix} P'_x(x, y) - \lambda & P'_y(x, y) \\ Q'_x(x, y) & Q'_y(x, y) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

и изучают знаки вещественных частей его корней:

$$\alpha_1^0 = \operatorname{Re} \lambda_1^0, \quad \alpha_2^0 = \operatorname{Re} \lambda_2^0. \tag{4}$$

При этом, если α_1^0 и α_2^0 отличны от нуля, то вопрос об устойчивости решается полностью, а случай $\alpha_1^0 \alpha_2^0 = 0$ называется критическим и требует, как правило, трудных дополнительных исследований.

Рассмотрим теперь уравнение (3) не в точке O, а в некоторой ее окрестности $U_\varepsilon(O)$, радиус которой $\varepsilon < R$ достаточно мал. Тогда величины

$$\alpha_1(x, y) = \operatorname{Re} \lambda_1(x, y), \quad \alpha_2(x, y) = \operatorname{Re} \lambda_2(x, y) \tag{5}$$

будут функциями от x и y, непрерывными в силу предположенной непрерывности $P'_x(x, y)$, $P'_y(x, y)$ и т. д. и обращающимися, соответственно, в (4) при $x = y = 0$. Следовательно, в некритическом случае знаки величин (5) в малой окрестности $U_\varepsilon(O)$ совпадают со знаками (4), и потому известные критерии поведения особой точки можно сформулировать, употребляя величины (5) вместо обычных (4), следующим образом:

Если $\alpha_1(x, y)$ и $\alpha_2(x, y)$ не обращаются в нуль в некоторой окрестности U_ε точки O, то выполнение в этой окрестности од-

ПОГАШЕНО

ного из условий: а) $\alpha_1(x, y) < 0$, $\alpha_2(x, y) < 0$; б) $\alpha_1(x, y) > 0$, $\alpha_2(x, y) > 0$; в) $\alpha_1(x, y)\alpha_2(x, y) < 0$ *является необходимым и достаточным, соответственно:* а) *для устойчивости,* б) *для полной неустойчивости и* в) *для полуустойчивости точки* O.

Оказывается, что, будучи высказаны в этой форме, условия а), б), в) продолжают оставаться достаточными и в критическом случае, если потребовать их выполнения всюду в U_ε, за исключением самой точки O (или даже за исключением любого нигде не плотного множества точек).

Прежде чем формулировать соответствующую теорему, придадим условиям а), б), в) несколько иной вид. Так как λ_1 и λ_2 суть корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - S(x, y)\lambda + \Delta(x, y) = 0,$$

где положено

$$S(x, y) = P'_x(x, y) + Q_y(x, y), \quad \Delta(x, y) = \begin{vmatrix} P'_x(x, y) & P'_y(x, y) \\ Q'_x(x, y) & Q'_y(x, y) \end{vmatrix}, \tag{6}$$

а α_1 и α_2 суть их вещественные части, то, очевидно:

а) эквивалентно условиям: $\mathrm{I}\ \Delta(x, y) > 0$, $S(x, y) < 0$;
б) » » $\mathrm{II}\ \Delta(x, y) > 0$, $S(x, y) > 0$; (7)
в) » » $\mathrm{III}\ \Delta(x, y) < 0$.

Теорема. *Пусть дана система* (1), *правые части которой удовлетворяют условиям* (2) *и дважды непрерывно дифференцируемы. Если существует такая окрестность* U_ε *особой точки* O, *что всюду в* U_ε, *за исключением, быть может, нигде не плотного множества точек, выполняется одно из условий* I, II, III (*в обозначениях* (6) *и* (7)), *то в* I *случае особая точка устойчива, во* II *вполне неустойчива и в* III *полуустойчива.*

По поводу условий теоремы отметим, что, в силу непрерывности S и Δ, условие I, например, означает, что всюду в U_ε имеем $\Delta \geqslant 0$ и $S \leqslant 0$, но ни в какой области $U_1 \subseteq U_\varepsilon$ не будет $\Delta \equiv 0$ или $S \equiv 0$. Аналогичное замечание относится к II и III.

Доказательство для случаев I и II. Докажем, что никакая траектория системы (1) не лежит целиком в U_ε. Допустим, что такая траектория есть. Тогда либо она сама есть цикл (простой или особый, т. е. проходящий через точку O), либо в ее α- или ω-предельном множестве есть такой цикл ([1]). Это, однако, противоречит критерию Бендиксона об отсутствии замкнутых траекторий в тех областях, где $S(x, y)$ сохраняет знак и $\not\equiv 0$. Таким образом, U_ε не содержит ни циклов, ни эллиптических областей, а потому состоит лишь из гиперболических (истинных и ложных) областей и параболических траекторий ([1]) (там же см. терминологию).

Покажем, что истинно гиперболических областей также нет в U_ε. Для этого, с одной стороны, вычислим аналитически индекс Пуанкаре I_0 особой точки O. В качестве контура Γ, окружающего O, возьмем линию уровня $P^2(x, y) + Q^2(x, y) = c^2$, где c^2 столь мало, что $\Gamma \subset U_\varepsilon$. В силу условий теоремы это возможно. Тогда, применяя формулу Грина — Остроградского, получим:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2 + Q^2} = \frac{1}{2\pi c^2}\int_\Gamma (PQ'_x - QP'_x)\,dx + (PQ'_y - QP'_y)dy =$$

$$= \frac{1}{\pi c^2}\iint_G \Delta\,dx\,dy > 0, \tag{8}$$

ибо $G \subset U_\varepsilon$, а $\Delta \geqslant 0$ и $\not\equiv 0$. Итак, $I_0 > 0$.

С другой стороны, вычислим I_0 геометрически. Пусть K — окружность, ограничивающая U_ε. Будем следить за вращением векторного поля (1), двигая вдоль K в положительном направлении точку z, снабженную касательной T_z и одной, например внешней, нормалью $\mathbf{n}_z$.

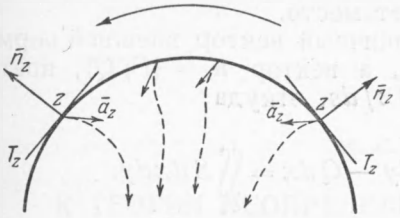


Рис. 1

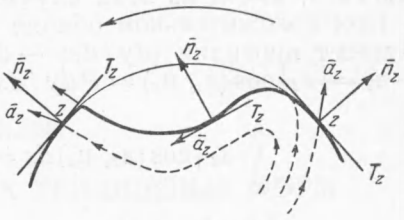


Рис. 2

Обозначим вектор $\{P; Q\}$ поля (1) в точке z через $\mathbf{a}_z$ и скажем, что $\mathbf{a}_z$ не вращается по сравнению с $\mathbf{n}_z$ на дуге $d \subset K$, если при движении z вдоль d вектор $\mathbf{a}_z$ не переходит с одной стороны T_z на другую. Очевидно, что если $\mathbf{a}_z$ не вращается по сравнению с $\mathbf{n}_z$ на всей окружности K, то при полном ее обходе он проделает столько же оборотов, сколько $\mathbf{n}_z$, т. е. 1. При подсчете I_0 можно заменять дугу окружности d произвольной дугой d_1 с теми же концами, лишь бы между d и d_1 не заключалась особая точка.

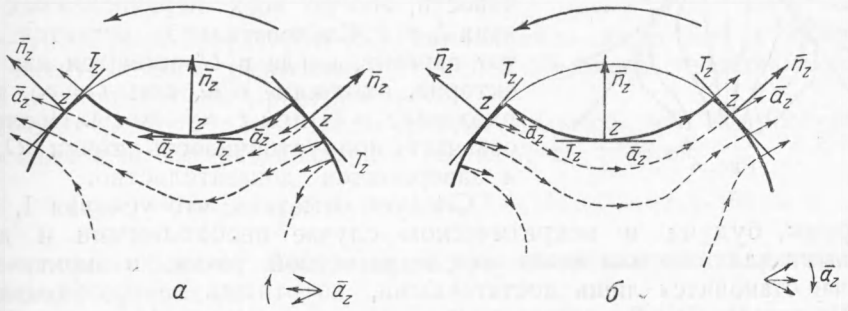


Рис. 3

Допустив, что I_0 содержит гиперболические области, проведем наглядно геометрический анализ возможных случаев, опуская строгое рассуждение, изобилующее утомительными подробностями.

При движении z вдоль гриницы параболической области $\mathbf{a}_z$ не вращается по сравнению с $\mathbf{n}_z$ (см. рис. 1; пунктир — траектории системы): то же самое замечаем в случае ложно гиперболической области, если удалить ее из U_ε, отчего часть окружности заменяется граничной траекторией этой области (см. рис. 2).

В случае же истинно гиперболической области $\mathbf{a}_z$ вращается по сравнению с $\mathbf{n}_z$ по часовой стрелке, независимо от направления движения решений в этой области (см. рис. 3*а*, *б*; часть окружности также заменена одним из решений). Таким образом, лишь за счет истинно гиперболических областей $\mathbf{a}_z$ вращается по сравнению с $\mathbf{n}_z$, и притом в отрицательную сторону. В результате полное вращение для $\mathbf{a}_z$ меньше, чем для $\mathbf{n}_z$, т. е. $I_0 < 1$ или $I_0 \leqslant 0$. А так как выше показано, что $I_0 > 0$, то заключаем, что U_ε не содержит истинно гиперболических областей. В таком случае, удаляя из U_ε все ложно гиперболические области, как это сделано на рис. 1, получим область U_1, на контуре которой K_1 (K_1 может иметь счетное число угловых точек, что несущественно) векторы поля $\mathbf{a}_z$ не вращаются по сравнению с нормалью $\mathbf{n}_z$, а значит, $\cos(\mathbf{a}_z, \mathbf{n}_z)$ остается все время либо $\leqslant 0$, либо $\geqslant 0$. Другими словами, векторы поля направлены или только внутрь или только наружу U_1

(не исключено касание к K_1); в первом случае все решения входят в U_1 при $t \to +\infty$, а во втором — при $t \to -\infty$. Ввиду произвольной малости области $U_\varepsilon \supseteq U_1$ первое означает устойчивость, а второе — полную неустойчивость точки O в смысле Ляпунова, и остается лишь выяснить, какой из этих случаев имеет место.

При положительном обходе K_1 единичный вектор внешней нормали $\mathbf{n}_z$ имеет проекции $\{dy/ds;\ -dx/ds\}$, а вектор $\mathbf{a}_z = \{P; Q\}$, поэтому $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{n}_z = |\mathbf{a}_z| \cos(\mathbf{a}_z, \mathbf{n}_z) = P\,dy/ds - Q\,dx/ds$, откуда

$$\int_K |\mathbf{a}_z| \cos(\mathbf{a}_z, \mathbf{n}_z)\,ds = \int_{K_1} P\,dy - Q\,dx = \iint_{U_1} S\,dx\,dy.$$

Последний интеграл в условиях I теоремы будет отрицателен, и, так как $\cos(\mathbf{a}_z, \mathbf{n}_z)$ не меняет знака, то и $\cos(\mathbf{a}_z, \mathbf{n}_z) \leqslant 0$, следовательно, особая точка устойчива; в условиях II получим $\cos(\mathbf{a}_z, \mathbf{n}_z) \geqslant 0$, и особая точка вполне неустойчива. Доказательство для случаев I и II окончено.

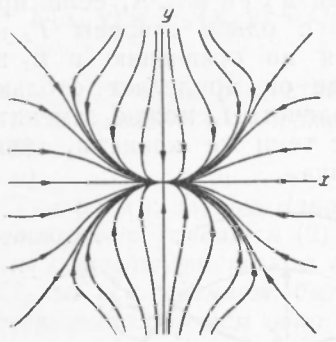


Рис. 4

В случае III, повторяя вычисления, приведшие к формуле (8), убедимся, что $I_0 < 0$. Тогда в расположении траекторий вблизи O не могут наблюдаться случаи центра, центрофокуса, устойчивости и полной неустойчивости, ибо во всех перечисленных случаях $I_0 = 1$. Следовательно, остается лишь тот вариант, когда в U_ε имеются как траектории, входящие в O при $t = \infty$, так и входящие в O при $t = -\infty$ (1). Последнее означает полуустойчивость точки O, чем и завершается доказательство.

Следует отметить, что условия I, II, III теоремы, будучи в некритическом случае необходимыми и достаточными для того или иного поведения особой точки, в критическом случае становятся лишь достаточными, но отнюдь не необходимыми.

Во-первых, взяв даже некритическую систему (1), для которой выполнено, например, условие I, можно добиться разрушения этого условия путем умножения правых частей (1) на одну и ту же функцию $H(x, y)$, равную нулю в O и строго положительную в окрестности, что не повлияет на устойчивость; примеры подобного рода легко строятся хотя бы в том простейшем случае, когда система (1) линейна, а $H(x, y) = x^2 + y^2$ (иначе говоря, критерии устойчивости по первому приближению оказываются не инвариантными по отношению к такому элементарному и употребительному в теории уравнений преобразованию, как замена времени; по мнению автора, на это обстоятельство до сих пор обращалось недостаточное внимание).

Во-вторых, приведем следующий пример: $dx/dt = xy^2 - x^3$, $dy/dt = -y$. Здесь $S(x, y) = -1 - 3x^2 + y^2$, а $\Delta(x, y) = 3x^2 - y^2$ и меняет знак в любой окрестности начала; между тем, особая точка устойчива, ибо на сторонах любого квадрата $|x| \leqslant \varepsilon$, $|y| \leqslant \varepsilon$ векторное поле направлено внутрь квадрата, как показывает прямая проверка. Вид интегральных кривых изображен на рис. 4.

Тульский
горный институт

Поступило
7 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949.